Übungsblatt 10

Mathematik für Ingenieure (Maschinenbauer und Sicherheitstechniker), 1. Semester, bei Prof. Dr. G. Herbort im WiSe13/14 – Dipl.-Math. T. Pawlaschyk, 07.01.14

Themen: Häufungswerte, Umkehrfunktionen

Aufgabe 1 Sei die Folge $(a_n)_{n\geq 1}$ definiert durch

$$a_1 := 1,\ a_2 := -2 \quad \text{und} \quad a_{n+2} := a_{n+1} - a_n.$$

Bestimmen die Häufungswerte dieser Folge.

Lösungen zu Aufgabe 1

Wir berechnen die ersten Folgenglieder und untersuchen, ob sie sich wiederholen.

$$\begin{aligned}
a_1 &= 1\\
a_2 &= -2\\
a_3 &= a_2 - a_1 = -2 - 1 = -3\\
a_4 &= a_3 - a_2 = -3 + 2 = -1\\
a_5 &= a_4 - a_3 = -1 + 3 = 2\\
a_6 &= a_5 - a_4 = 2 + 1 = 3\\
a_7 &= a_6 - a_5 = 3 - 2 = 1 = a_1\\
a_8 &= a_7 - a_6 = 1 - 3 = -2 = a_2
\end{aligned}$$

Es folgt, dass für alle $l \in \{1, \dots, 6\}$ und $k \in \mathbb{N}_0$ die Gleichheit $a_{6k+l} = a_l$ gilt. Die Folgen $(a_{6k+l})_{k\geq 0}$ sind somit konstant gliech a_l. Die Häufungswerte sind daher

$$a_1 = 1,\ a_2 = -2,\ a_3 = -3,\ a_4 = -1,\ a_5 = 2,\ a_6 = 3.$$

Aufgabe 2 Berechnen Sie für die folgenden Funktionen $f \circ g$ sowie $g \circ f$.

(a) $f(x) = 3x^2 - 4x + 1$ und $g(x) = 4x^2 - 1$

(b) $f(x) = 9x^2 + 54x + 99$ und $g(y) = \sqrt{\frac{1}{9}y - 2} - 3$

(c) $f(x) = \sqrt[3]{x^5}$ und $g(y) = \sqrt[5]{y^{-2}}$

Lösungen zu Aufgabe 2

(a)

$$\begin{aligned}
(f \circ g)(x) &= 3(4x^2 - 1)^2 - 4(4x^2 - 1) + 1\\
&= 3(16x^4 - 8x^2 + 1) - 16x^2 + 4 + 1\\
&= 48x^4 - 24x^2 + 3 - 16x^2 + 5\\
&= 48x^4 - 40x^2 + 8
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(g \circ f)(x) &= 4(3x^2 - 4x + 1)^2 - 1 \\
&= 4(9x^4 + 16x^2 + 1 - 24x^3 - 8x + 6x^2) - 1 \\
&= 36x^4 - 96x^3 + 88x^2 - 32x + 3
\end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned}
(f \circ g)(y) &= 9\left(\sqrt{\frac{1}{9}y - 2} - 3\right)^2 + 54\left(\sqrt{\frac{1}{9}y - 2} - 3\right) + 99 \\
&= 9\left(\frac{1}{9}y - 2\right) - 54\left(\sqrt{\frac{1}{9}y - 2}\right) + 81 + 54\left(\sqrt{\frac{1}{9}y - 2} - 3\right) + 99 \\
&= y - 18 + 81 - 162 + 99 = y
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(g \circ f)(x) &= \sqrt{\frac{1}{9}(9x^2 + 54x + 99) - 2} - 3 \\
&= \sqrt{x^2 + 6x + 11 - 2} - 3 \\
&= \sqrt{x^2 + 6x + 9} - 3 \\
&= \sqrt{(x+3)^2} - 3 \\
&= x + 3 - 3 = x
\end{aligned}$$

(c)

$$(g \circ f)(x) = \left(x^{\frac{5}{3}}\right)^{-\frac{2}{5}} = x^{-\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{x^{-2}}$$

$$(f \circ g)(y) = \left(y^{-\frac{2}{5}}\right)^{\frac{5}{3}} = y^{-\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{y^{-2}}$$

Aufgabe 3 Seien die Funktionen $f : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ und $g : [0, 1] \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f(x) = \frac{1-x}{1+x} \quad \text{und} \quad g(x) = \frac{x}{x^2+1} \;.$$

(a) Untersuchen Sie beide Funktionen auf Monotonie.

(b) Bestimmen Sie jeweils den Wertebereich von f und g.

(c) Berechnen Sie die Umkehrfunktion von f bzw. g auf den jeweiligen Wertebereichen.

Lösungen zu Aufgabe 3

(a) Die Funktion ist monoton fallend auf $[0, +\infty)$, denn sei $x > y$, also $x - y > 0$. Dann gilt für den Quotienten d

$$\frac{f(x)}{f(y)} = \frac{(1-x)(1+y)}{(1+x)(1-y)} = \frac{1 - (x-y) - xy}{1 + x - y - xy} < 1,$$

denn der Zähler ist offensichtlich kleiner als der Nenner. Also ist $f(x) < f(y)$.
Alternativ kann man die Ableitung von f berechnen: $f'(x) = -\frac{2}{(1+x)^2}$. Diese ist negativ für alle $x \in [0, +\infty)$.

Es gilt für $x, y \in [0, 1]$ mit $x > y$, dass

$$g(x) - g(y) = \frac{x}{x^2+1} - \frac{y}{y^2+1} = \frac{x(y^2+1) - y(x^2+1)}{(x^2+1)(y^2+1)} = \frac{(1-xy)(x-y)}{(x^2+1)(y^2+1)} > 0,$$

da $xy < 1$, also $1 - xy > 0$, und $x - y > 0$. Die Funktion g steigt daher monoton.

Alternativ kann auch hier die Ableitung ausgerechnet werden:

$$g'(x) = \frac{1-x^2}{(x^2+1)^2} > 0,$$

falls $x \in (0,1)$ und damit $x^2 \in (0,1)$.

(b) Da f auf $[0,+\infty)$ stetig ist, nimmt f alle Werte zwischen

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{1-x}{1+x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{1}{x}-1}{\frac{1}{x}+1} = -1 \quad \text{und} \quad f(0) = 1$$

an (siehe Zwischenwertsatz). Aufgrund der Monotonie können keine Werte außerhalb von $[-1,1]$ angenommen werden. Der Wertebereich von f liegt also in $[-1,1]$. Da $-1 < f(x)$ für alle $x \geq 0$, ist der Wertebereich von f genau $(-1,1]$.

Da g auf $[0,1]$ stetig ist, nimmt g alle Werte zwischen

$$g(0) = 0 \quad \text{und} \quad g(1) = \frac{1}{2}$$

an (siehe Zwischenwertsatz). Aufgrund der Monotonie können keine Werte außerhalb von $[0,1/2]$ angenommen werden. Der Wertebereich von g ist also genau $[0,1/2]$.

(c) Wir berechnen die Umkehrfunktion von f, indem wir die Gleichung $f(x) = y$ nach x auflösen, d.h.

$$\begin{aligned}
\frac{1-x}{1+x} = y \quad &\Leftrightarrow \quad 1-x = y(1+x)\\
&\Leftrightarrow \quad 1-x = y+xy\\
&\Leftrightarrow \quad 1-y = x+xy\\
&\Leftrightarrow \quad 1-y = x(1+y)\\
&\Leftrightarrow \quad \frac{1-y}{1+y} = x
\end{aligned}$$

Die Umkehrabbildung ist also $f^{-1}(y) = \frac{1-y}{1+y}$ und stimmt mit der ursprünglichen Funktion f überein.

Wie oben lösen wir $g(x) = y$ nach x auf:

$$\begin{aligned}
\frac{x}{1+x^2} = y \quad &\Leftrightarrow \quad x = y(x^2+1)\\
&\Leftrightarrow \quad 0 = yx^2 + y - x\\
&\Leftrightarrow \quad 0 = y(x^2 + 1 - xy)
\end{aligned}$$

Die Gleichung wird für $y \neq 0$ gelöst durch

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{1-4y^2}}{2y}.$$

Setzt man $g(x)$ für y ein, so muss das negative Vorzeichen gewählt werden, damit $\frac{1\pm\sqrt{1-4g(x)^2}}{2g(x)} = x$ erfüllt wird. Die Funktion

$$g^{-1}(y) := \begin{cases} \frac{1\pm\sqrt{1-4y^2}}{2y}, & y \in (0,1/2] \\ 0, & y = 0 \end{cases}$$

bildet somit die Umkehrfunktion von g.

Aufgabe 4

Bestimmen Sie für die nachfolgenden Funktionen jeweils größtmögliche Definitions- und Wertebereiche, auf denen eine Umkehrfunktion existiert.

$$\text{(a) } f(x) = 5x^2 + 4x - 18 \qquad \text{(b) } g(x) = \frac{1}{1-x^2}.$$

Lösungen zu Aufgabe 4

(a) Die Parabel $f(x) = 5x^2 + 4x - 18$ ist überall auf $\mathbb{R}$ definiert. Wir bringen sie zunächst auf Scheitelpunktform:

$$y = 5x^2 + 4x - 18 = 5\left(x^2 + \frac{4}{5}x - \frac{18}{5}\right) = 5\left(\left(x + \frac{2}{5}\right)^2 - \frac{4}{25} - \frac{90}{25}\right) = 5\left(\left(x + \frac{2}{5}\right)^2 - \frac{94}{25}\right)$$

Die Parabel ist nach oben geöffnet und hat den kleinsten Wert für $x_0 = -\frac{2}{5}$ mit $f(x_0) = -\frac{94}{5}$. Der Wertebereich ist somit $[-94/5, +\infty)$. Die Parabel besitzt nun auf $(-\infty, -2/5]$ sowie auf $[-2/5, +\infty)$ Umkehrfunktionen, die auf $[-94/5, +\infty)$ definiert sind. Wir berechnen diese, indem wir mit Hilfe der Scheitelpunktform nach x auflösen:

$$\begin{aligned} & y = 5\left(\left(x + \frac{2}{5}\right)^2 - \frac{94}{25}\right) \\ \Leftrightarrow \quad & \frac{1}{5}y + \frac{94}{25} = \left(x + \frac{2}{5}\right)^2 \\ \Leftrightarrow \quad & \pm\sqrt{\frac{1}{5}y + \frac{94}{25}} = x + \frac{2}{5} \\ \Leftrightarrow \quad & -\frac{2}{5} \pm \sqrt{\frac{1}{5}y + \frac{94}{25}} = x \end{aligned}$$

Also

$$f^{-1} = h_1 : [-94/5, +\infty) \to [-2/5, +\infty), \quad h_1(y) := -\frac{2}{5} + \sqrt{\frac{1}{5}y + \frac{94}{25}}$$

und

$$f^{-1} = h_2 : [-94/5, +\infty) \to (-\infty, -2/5], \quad h_2(y) := -\frac{2}{5} - \sqrt{\frac{1}{5}y + \frac{94}{25}}$$

Speziell für h_2 prüfen wir nach. Sei $x \in (-\infty, -2/5]$. Dann ist

$$\begin{aligned} (h_2 \circ g)(x) &= -\frac{2}{5} - \sqrt{\frac{1}{5}(5x^2 + 4x - 18) + \frac{94}{25}} = -\frac{2}{5} - \sqrt{\left(x + \frac{2}{5}\right)^2} \\ &= -\frac{2}{5} - \left|x + \frac{2}{5}\right| = -\frac{2}{5} - \left(-\left(x + \frac{2}{5}\right)\right) = x. \end{aligned}$$

(b) Die Funktion g ist auf $\mathbb{R} \setminus \{\pm 1\}$ definiert. Wir suchen Umkehrfunktionen auf den Teilintervallen $(-\infty, -1)$, $(-1, 1)$ und $(1, +\infty)$.

Da $\lim_{x \to \pm\infty} g(x) = 0$, $\lim_{x \uparrow -1} g(x) = -\infty = \lim_{x \downarrow +1} g(x)$, g auf $(-\infty, -1)$ und $(1, +\infty)$ stetig und negativ ist, ist der Wertebereich von g auf $(-\infty, -1)$ und $(1, +\infty)$ gerade gleich $(-\infty, 0)$.

Innerhalb von $(-1, 1)$ ist die Funktion g größer gleich 1, da $1 \geq 1 - x^2$ für $x \in (-1, 1)$. Zudem ist $\lim_{x \uparrow 1} g(x) = +\infty = \lim_{x \downarrow -1} g(x)$. Aufgrund der Stetigkeit von g in $(-1, 1)$ und dem Zwischenwertsatz ist der Wertebereich von g dort gerade gleich $[1, +\infty)$.

Wir versuchen nun, auf den Wertebereichen $(-\infty, 0)$ und $[1, +\infty)$ geeignete Umkehrfunktionen für g zu definieren. Sei nun $y \in (-\infty, 0)$ oder $y \in [1, +\infty)$. Wir lösen die Gleichung $g(x) = y$ nach x auf:

$$\begin{aligned} & y = \frac{1}{1 - x^2} \\ \Leftrightarrow \quad & 1 = y(1 - x^2) \\ \Leftrightarrow \quad & 0 = (-y)\left(x^2 + \frac{1 - y}{y}\right) \end{aligned}$$

Da $y \neq 0$, können wir die letzte Gleichung bedenkenlos durch y teilen und erhalten

$$0 = x^2 + \frac{1 - y}{y} \quad \Leftrightarrow \quad x^2 = \frac{y - 1}{y}$$

Da $y \in (-\infty, 0)$ oder $y \in [1, +\infty)$, ist der Term $\frac{y-1}{y}$ immer größer gleich Null, d.h. wir können die Wurzel ziehen und erhalten

$$x = \pm\sqrt{\frac{y-1}{y}}.$$

Nun müssen wir entscheiden, welcher Zweig der Wurzel je nach Werte- und Definitionsbereich von g eine Umkehrfunktion gibt. Außerdem müssen wir beachten, dass es auf ganz $(-1, 1)$ keine Umkehrfunktion von g gibt, sondern höchstens auf $(-1, 0]$ und $[0, 1)$, da g achsensymmetrisch zur y-Achse ist.

Dies führt zu folgenden Umkehrfunktionen für g:

$$g^{-1} = h_1 : (-\infty, 0) \to (-\infty, -1), \quad h_1(y) = -\sqrt{\frac{y-1}{y}}$$

$$g^{-1} = h_2 : [1, +\infty) \to (-1, 0], \quad h_2(y) = -\sqrt{\frac{y-1}{y}}$$

$$g^{-1} = h_3 : [1, +\infty) \to [0, 1), \quad h_3(y) = \sqrt{\frac{y-1}{y}}$$

$$g^{-1} = h_4 : (-\infty, 0) \to (1, +\infty), \quad h_4(y) = \sqrt{\frac{y-1}{y}}$$