Lösungen zu Übungsblatt 9

Mathematik für Ingenieure (Maschinenbauer und Sicherheitstechniker), 1. Semester, bei Prof. Dr. G. Herbort im WiSe13/14 – Dipl.-Math. T. Pawlaschyk, 17.12.13

Themen: Grenzwerte von Folgen

Aufgabe 1 Prüfen Sie auf Konvergenz und bestimmen Sie ggf. den Grenzwert der nachstehenden Folgen.

(a) $\sqrt{n^3+1}-\sqrt{n^2-1}$ (b) $\sqrt{n^2+1}-\sqrt{n^2-1}$ (c) $3^{-2n}\dfrac{n^5-1}{n^2+4}$ (d) $(-1)^n\dfrac{n-1}{n+1}$

Lösungen zu Aufgabe 1

Zu (a): Für $n \geq 2$ sind $n^4 \geq n^3+1$ und $n^4 \geq n^2-1$ und somit auch $n^2 \geq \sqrt{n^3+1}$ und $n^2 \geq \sqrt{n^2-1}$. Dann gilt

$$\sqrt{n^3+1}-\sqrt{n^2-1} = \frac{n^3-n^2+2}{\sqrt{n^3+1}+\sqrt{n^2-1}} \geq \frac{n^3-n^2+2}{2n^2} \xrightarrow{n\to\infty} \infty.$$

Zu (b):

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt{n^2+1}-\sqrt{n^2-1} = \lim_{n\to\infty} \frac{2}{\sqrt{n^2+1}+\sqrt{n^2-1}} = 0$$

Zu (c): Es folgt aus einem Beispiel aus der Vorlesung nach Satz 4.1.4, dass

$$\lim_{n\to\infty} 3^{-2n}\frac{n^5-1}{n^2+4} = 0,$$

da 3^{-2n} 'schneller' gegen 0 konvergiert,als $\frac{n^5-1}{n^2+4}$ gegen ∞.
Zu (d): Für gerade n erhalten wir

$$(-1)^n\frac{n-1}{n+1} = 1 \cdot \frac{n-1}{n+1}$$

Dies konvergiert gegen 1. Für ungerade n erhalten wir

$$(-1)^n\frac{n-1}{n+1} = (-1) \cdot \frac{n-1}{n+1}$$

Dies konvergiert gegen -1. Die Folge hat also zwei Häufungswerte und kann nicht konvergieren.

Aufgabe 2 Sei die Folge $(a_n)_{n\geq 1}$ durch $a_n := \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{2^k}$ gegeben.

(a) Zeigen Sie, dass $(a_n)_{n\geq 1}$ monoton wächst und nach oben beschränkt ist.
(b) Zeigen Sie induktiv, dass $a_n = 2 - \frac{n+2}{2^n}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt.
(c) Bestimmen Sie den Grenzwert von $(a_n)_{n\geq 1}$.

Lösungen zu Aufgabe 2

Zu (a): Da $a_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{2^k}$ eine Summe von positiven Zahlen ist, ist die Folge monoton wachsend und $a_n > 0$. Genauer:

$$a_{n+1} = \sum_{k=1}^{n+1} \frac{k}{2^k} = \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{2^k} + \frac{n+1}{2^{n+1}} = a_n + \frac{n+1}{2^{n+1}} > a_n.$$

Die Beschränktheit wird aus (b) folgen, denn

$$a_n = 2 - \frac{n+2}{2^n} < 2.$$

Zu (b): Wir zeigen induktiv, dass $a_n = 2 - \frac{n+2}{2^n}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt. Für $n = 1$ ist $a_1 = \frac{1}{2} = 2 - \frac{3}{2}$. Wir schließen von n nach $n+1$. Dann gilt:

$$\begin{aligned}
a_{n+1} &= \sum_{k=1}^{n+1} \frac{k}{2^k} \\
&= a_n + \frac{n+1}{2^{n+1}} \\
&\overset{\text{Ind.-vor.}}{=} 2 - \frac{n+2}{2^n} + \frac{n+1}{2^{n+1}} \\
&= 2 - \frac{2(n+2)-(n+1)}{2^{n+1}} \\
&= 2 - \frac{n+3}{2^{n+1}} = 2 - \frac{(n+1)+2}{2^{n+1}}
\end{aligned}$$

Zu (c): Für den Grenzwert gilt

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} 2 - \frac{n+2}{2^n} = 2.$$

Aufgabe 3 Sei $(b_n)_{n\geq 1}$ rekursiv definiert durch

$$b_1 = \frac{1}{2} \quad \text{und} \quad b_n = \frac{b_{n-1}}{1 + n2^n \cdot b_{n-1}}, \ n \geq 2.$$

Bestimmen Sie den Grenzwert von $(b_n)_{n\geq 1}$, indem Sie induktiv zeigen, dass $b_n = \frac{1}{(n-1)2^{n+1}+2}$ ist.

Lösungen zu Aufgabe 3

Wir setzen $a_n := \frac{1}{b_n}$. Dann gilt

$$a_n = \frac{1}{b_n} = \frac{1 + n2^n \cdot b_{n-1}}{b_{n-1}} = \frac{1}{b_{n-1}} + n2^n = a_{n-1} + n2^n.$$

Wir weisen nun induktiv nach, dass $a_n = (n-1)2^{n+1}+2$ gilt. Für $n = 1$ ist $a_1 = \frac{1}{b_1} = 2 = (1-1)2^{1+1}+2$. Wir schließen von $n-1$ nach n. Dann gilt

$$\begin{aligned}
a_n &= a_{n-1} + n2^n \\
&\overset{\text{I.V.}}{=} ((n-1)-1)2^{(n-1)+1} + 2 + n2^n \\
&= (n-2)2^n + 2 + n2^n \\
&= (2n-2)2^n + 2 \\
&= (n-1)2^{n+1} + 2
\end{aligned}$$

Dann ist $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$ und damit $\lim_{n\to\infty} b_n = 0$.

Aufgabe 4 Seien $a, b > 0$ und $a_1 = \sqrt{ab}$ und $b_1 = \frac{1}{2}(a+b)$. Definiere für $n \geq 2$ die Folgenglieder

$$a_n = \sqrt{a_{n-1}b_{n-1}} \quad \text{und} \quad b_n = \frac{1}{2}(a_{n-1} + b_{n-1}).$$

Zeigen Sie:

(a) $a_n \leq b_n$ für alle $n \geq 1$.

(b) $(a_n)_{n\geq 1}$ wächst und $(b_n)_{n\geq 1}$ fällt monoton.

(c) Zeigen Sie, dass $(a_n)_{n\geq 1}$ und $(b_n)_{n\geq 1}$ konvergieren, und zwar mit dem gleichen Grenzwert.

Lösungen zu Aufgabe 4

Zu (a): Mit der binomischen Formel gilt

$$x + y - 2\sqrt{xy} = (\sqrt{x} - \sqrt{y})^2 \geq 0 \Rightarrow \frac{1}{2}(x+y) \geq \sqrt{xy}$$

für alle $x, y \geq 0$. Daraus erhalten wir $a_n \leq b_n$, also

$$\frac{a_n}{b_n} \geq 1 \quad \text{und} \quad a_n - b_n \leq 0.$$

Zu (b): Aus (a) folgt nun

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \sqrt{\frac{b_n}{a_n}} \geq 1 \Rightarrow a_{n+1} \geq a_n.$$

Damit wächst die Folge $(a_n)_{n\geq 1}$. Außerdem ist

$$b_{n+1} - b_n = \frac{1}{2}(a_n - b_n) \leq 0 \Rightarrow b_{n+1} \leq b_n.$$

Die Folge $(b_n)_{n\geq 1}$ fällt. Schließlich erhalten wir die Ungleichungen

$$0 < a_1 \leq a_n \leq b_n \leq b_1.$$

Zu (c): Die Folgen $(a_n)_{n\geq 1}$ und $(b_n)_{n\geq 1}$ sind also beschränkt und monoton. Damit konvergieren sie gegen Grenzwerte a_0 bzw. b_0. Für diese gilt aber

$$a_0 = \sqrt{a_0 b_0} \qquad b_0 = \frac{1}{2}(a_0 + b_0)\,.$$

Außerdem sind a_0 und b_0 wegen den letzten Ungleichungen in (b) echt positiv. Wir quadrieren die erste Gleichung und erhalten $a_0^2 = a_0 b_0$, also $a_0 = b_0$.