Übungsblatt 9

Mathematik für Ingenieure (Maschinenbauer und Sicherheitstechniker), 1. Semester, bei Prof. Dr. G. Herbort im WiSe13/14 – Dipl.-Math. T. Pawlaschyk, 17.12.13

Themen: Grenzwerte von Folgen

Aufgabe 1 Prüfen Sie auf Konvergenz und bestimmen Sie ggf. den Grenzwert der nachstehenden Folgen.

(a) $\sqrt{n^3+1}-\sqrt{n^2-1}$ (b) $\sqrt{n^2+1}-\sqrt{n^2-1}$ (c) $3^{-2n}\dfrac{n^5-1}{n^2+4}$ (d) $(-1)^n\dfrac{n-1}{n+1}$

Aufgabe 2 Sei die Folge $(a_n)_{n\geq 1}$ durch $a_n := \displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{2^k}$ gegeben.

(a) Zeigen Sie, dass $(a_n)_{n\geq 1}$ monoton wächst und nach oben beschränkt ist.
(b) Zeigen Sie induktiv, dass $a_n = 2-\frac{n+2}{2^n}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt.
(c) Bestimmen Sie den Grenzwert von $(a_n)_{n\geq 1}$.

Aufgabe 3 Sei $(b_n)_{n\geq 1}$ rekursiv definiert durch

$$b_1 = \frac{1}{2} \quad \text{und} \quad b_n = \frac{b_{n-1}}{1+n2^n\cdot b_{n-1}}, \ n \geq 2.$$

Bestimmen Sie den Grenzwert von $(b_n)_{n\geq 1}$, indem Sie induktiv zeigen, dass $b_n = \frac{1}{(n-1)2^{n+1}+2}$ ist.

Aufgabe 4 Seien $a, b > 0$ und $a_1 = \sqrt{ab}$ und $b_1 = \frac{1}{2}(a+b)$. Definiere für $n \geq 2$ die Folgenglieder

$$a_n = \sqrt{a_{n-1}b_{n-1}} \quad \text{und} \quad b_n = \frac{1}{2}(a_{n-1}+b_{n-1}).$$

Zeigen Sie:
(a) $a_n \leq b_n$ für alle $n \geq 1$.
(b) $(a_n)_{n\geq 1}$ wächst und $(b_n)_{n\geq 1}$ fällt monoton.
(c) Zeigen Sie, dass $(a_n)_{n\geq 1}$ und $(b_n)_{n\geq 1}$ konvergieren, und zwar mit dem gleichen Grenzwert.