

Lösungen zu Übungsblatt 8

Mathematik für Ingenieure (Maschinenbauer und Sicherheitstechniker), 1. Semester, bei Prof. Dr. G. Herbort im WiSe13/14 – Dipl.-Math. T. Pawlaschik, 10.12.13

Themen: Gleichungssysteme mit Parametern, Folgen

Aufgabe 1 Zeigen Sie, dass ein Vektor $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$ genau dann Linearkombination von $\vec{u}_1 = \begin{pmatrix} -5 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix}$,

$\vec{u}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 12 \end{pmatrix}$ und $\vec{u}_3 = \begin{pmatrix} 6 \\ 12 \\ -48 \end{pmatrix}$ ist, wenn $2b_1 - 5b_2 - b_3 = 0$ gilt.

Lösungen zu Aufgabe 1

Genau dann ist $\vec{b}$ Linearkombination der gegebenen Vektoren $\vec{u}_1, \vec{u}_2$ und $\vec{u}_3$, wenn das LGS

$$\begin{pmatrix} -5 & 1 & 6 \\ -3 & -2 & 12 \\ 5 & 12 & -48 \end{pmatrix} \cdot \vec{x} = \vec{b}$$

lösbar ist. Mit Zeilenstufenverfahren können wir die erweiterte Matrix z.B. in

$$\begin{pmatrix} -5 & 1 & 6 & | & b_1 \\ -3 & -2 & 12 & | & b_2 \\ 5 & 12 & -48 & | & b_3 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{\text{I} + \text{II} \\ 3\text{I} - 5\text{II}}} \begin{pmatrix} -5 & 1 & 6 & | & b_1 \\ 0 & 13 & -42 & | & 3b_1 - 5b_2 \\ 0 & 13 & -42 & | & b_1 + b_3 \end{pmatrix} \xrightarrow{3\text{I} - 5\text{II}} \\ \begin{pmatrix} -5 & 1 & 6 & | & b_1 \\ 0 & -13 & 42 & | & 5b_2 - 3b_1 \\ 0 & 0 & 0 & | & 2b_1 - 5b_2 + b_3 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{\text{I} + \text{II} \\ 3\text{I} - 5\text{II}}} \begin{pmatrix} -5 & 1 & 6 & | & b_1 \\ 0 & -13 & 42 & | & 5b_2 - 3b_1 \\ 0 & 0 & 0 & | & 2b_1 - 5b_2 + b_3 \end{pmatrix}$$

überführen. In der letzten Zeile erhalten wir also die Bedingung, dass $2b_1 - 5b_2 - b_3$ verschwinden muss, damit das Gleichungssystem lösbar ist. Weitere Nullzeilen gibt es nicht, sodass $2b_1 - 5b_2 - b_3 = 0$ die einzige Bedingung ist.

Aufgabe 2 Für welche $s, t \in \mathbb{R}$ ist das folgende Gleichungssystem lösbar?

$$\begin{aligned} 2x_1 + 4x_3 + 3x_4 + 7x_5 &= 1 \\ x_1 + 4x_2 + 2x_3 + 8x_4 + 3x_5 &= 0 \\ 8x_2 + 13x_4 - x_5 &= -1 \\ x_1 - 4x_2 + 2x_3 - 5x_4 + 4x_5 &= s \\ 4x_1 + 8x_2 + 8x_3 + 19x_4 + 13x_5 &= t \end{aligned}$$

Lösungen zu Aufgabe 2

Wir bringen die erweiterte Matrix des Gleichungssystems auf Zeilenstufenform.

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 2 & 0 & 4 & 3 & 7 & 1 \\ 1 & 4 & 2 & 8 & 3 & 0 \\ 0 & 8 & 0 & 13 & -1 & -1 \\ 1 & -4 & 2 & -5 & 4 & s \\ 4 & 8 & 8 & 19 & 13 & t \end{array} \right) \xrightarrow{\substack{\text{I} - 2\text{II} \\ \text{I} - 2\text{IV} \\ \text{I} - \text{V}}} \left(\begin{array}{ccccc|c} 2 & 0 & 4 & 3 & 7 & 1 \\ 0 & -8 & 0 & -13 & 1 & 1 \\ 0 & 8 & 0 & 13 & -1 & -1 \\ 0 & 8 & 0 & 13 & -1 & 1 - 2s \\ 0 & -8 & 0 & -13 & 1 & 2 - t \end{array} \right)$$

Man sieht nun leicht, dass $s = t = 1$ gelten muss, damit das Gleichungssystem lösbar ist.

Aufgabe 3 Invertieren Sie die folgenden Matrizen.

$$(a) \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (b) \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 6 & -6 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Lösungen zu Aufgabe 3

Zu (a):

$$\begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 & | & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & | & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & | & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{I} + 2\text{III}} \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 & | & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & | & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & | & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\text{III} - \text{I}} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & | & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & | & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & | & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{I} : 2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & | & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & | & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & | & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Zu (b):

$$\begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 & | & 1 & 0 & 0 \\ 6 & -6 & 2 & | & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 2 & | & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{(-3)\text{I} + \text{II} \\ (-1)\text{I} + \text{III}}} \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 & | & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -1 & | & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & | & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{2\text{II} - 3\text{III}} \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 & | & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -1 & | & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -5 & | & -3 & 2 & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{(-5)\text{II} + \text{III} \\ 5\text{I} + \text{III}}} \begin{pmatrix} 10 & -15 & 0 & | & 2 & 2 & -3 \\ 0 & -15 & 0 & | & 12 & -3 & -3 \\ 0 & 0 & -5 & | & -3 & 2 & -3 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\substack{\text{I} : 10 \\ \text{II} : (-15) \\ \text{III} : (-5)}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & | & -1 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & | & -4/5 & 1/5 & 1/5 \\ 0 & 0 & 1 & | & 3/5 & -2/5 & 3/5 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 4 Bestimmen Sie den Grenzwert der nachstehenden Folgen.

$$(a) \frac{1}{n} \cdot \frac{4n^4 + 3n^2 + 2}{3n^3 + 2n^2 + 3n} \quad (b) \frac{(4n-2)(3n+4)^2}{(2n^2+1)(6n^2+2)} \quad (c) \frac{n^2}{n+4} - \frac{2n}{n+2} - \frac{n^2}{n+3}$$

Lösungen zu Aufgabe 4

Zu (a): Wir kürzen n mit der höchsten Potenz im Zähler- und Nennerterm, hier also mit n^4 , und lesen dann den Grenzwert ab.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \cdot \frac{4n^4 + 3n^2 + 2}{3n^3 + 2n^2 + 3n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4n^4 + 3n^2 + 2}{3n^4 + 2n^3 + 3n^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4 + \frac{3}{n^2} + \frac{2}{n^4}}{3 + \frac{2}{n} + \frac{3}{n^2}} = \frac{4}{3}$$

Zu (b): Wir lösen zuerst die Klammern auf und gehen vor wie in (a).

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(4n-2)(3n+4)^2}{(2n^2+1)(6n^2+2)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{36n^3 + 78n^2 + 16n - 32}{12n^4 + 10n^2 + 2} = 0$$

Zu (c): Wir bringen auf einen Bruch und gehen dann vor wie in (a) bzw. (b).

$$\begin{aligned} \frac{n^2}{n+4} - \frac{2n}{n+2} - \frac{n^2}{n+3} &= \frac{n^2(n+2)(n+3) - 2n(n+3)(n+4) - n^2(n+3)}{(n+2)(n+3)(n+4)} \\ &= \frac{-3n^3 - 16n^2 - 24n}{n^3 + 9n^2 + 26n + 24} \\ &= \frac{n^3(-3 - \frac{16}{n} - \frac{24}{n^2})}{n^3(1 + \frac{9}{n} + \frac{26}{n^2} + \frac{24}{n^3})} \\ &= \frac{-3 - \frac{16}{n} - \frac{24}{n^2}}{1 + \frac{9}{n} + \frac{26}{n^2} + \frac{24}{n^3}} \\ &\xrightarrow{n \rightarrow \infty} -3 \end{aligned}$$