Lösungen zu Übungsblatt 7

Mathematik für Ingenieure (Maschinenbauer und Sicherheitstechniker), 1. Semester, bei Prof. Dr. G. Herbort im WiSe13/14 – Dipl.-Math. T. Pawlaschyk, 03.12.13

Themen: Vektor- und Matrixrechnung im $\mathbb{R}^n$

Aufgabe 1 (i) Eine Gerade $G \subset \mathbb{R}^n$ ist durch $G := \vec{A} + \mathbb{R}\vec{v}$ zu beschreiben, wobei $\vec{v} \neq \vec{0}$. Zeigen Sie: 2 Geraden $G_1 := \vec{A}_1 + \mathbb{R}\vec{v}_1$ und $G_2 := \vec{A}_2 + \mathbb{R}\vec{v}_2$ schneiden sich nicht, wenn $\vec{A}_2 - \vec{A}_1, \vec{v}_1$ und $\vec{v}_2$ linear unabhängig sind.

(ii) Überprüfen Sie, ob sich folgende Geraden im $\mathbb{R}^3$ schneiden oder windschief liegen, d.h. sich nicht schneiden und auch nicht parallel verlaufen.

$$\text{(a) } G_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + \mathbb{R} \begin{pmatrix} -7 \\ 4 \\ 13 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad G_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -8 \end{pmatrix} + \mathbb{R} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -19 \end{pmatrix}$$

$$\text{(b) } G_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \mathbb{R} \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad G_2 = \begin{pmatrix} -3 \\ 10/3 \\ 4/3 \end{pmatrix} + \mathbb{R} \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Berechnen Sie ggf. den Schnittpunkt.

Lösungen zu Aufgabe 1

(i) Angenommen, G_1 und G_2 schneiden sich im Punkte $\vec{S}$. Dann gibt es Zahlen s und t, sodass

$$\vec{S} = \vec{A}_1 + s\vec{v}_1 = \vec{A}_2 + t\vec{v}_2 \quad \Rightarrow \quad \vec{A}_1 - \vec{A}_2 + s\vec{v}_1 - t\vec{v}_2 = 0.$$

Somit wären $\vec{A}_2 - \vec{A}_1, \vec{v}_1$ und $\vec{v}_2$ linear abhängig - ein Widerspruch.

(ii) (a) Wir berechnen die Differenz der Ortsvektoren

$$\vec{A}_2 - \vec{A}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 8 \end{pmatrix}$$

und benutzen Teil (i):

$$\langle \begin{pmatrix} -7 \\ 4 \\ 13 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 8 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -19 \end{pmatrix} \rangle = \langle \begin{pmatrix} -7 \\ 4 \\ 13 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \cdot (-19) - 8 \cdot 1 \\ 8 \cdot 1 - 1 \cdot (-19) \\ 1 \cdot 1 - 1 \cdot 1 \end{pmatrix} \rangle = \langle \begin{pmatrix} -7 \\ 4 \\ 13 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -27 \\ 27 \\ 0 \end{pmatrix} \rangle = 189+108+0 = 297 \neq 0.$$

Also sind $\vec{A}_2 - \vec{A}_1$ und die Richtungsvektoren der Geraden G_1 und G_2 linear unabhängig. Nach Teil (i) gibt es keinen Schnittpunkt.

(b) Wir gehen wie in Teil (ii) (a) vor. Wir berechnen

$$\vec{A}_2 - \vec{A}_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -3 \\ 10/3 \\ 4/3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -7/3 \\ -4/3 \end{pmatrix}.$$

und vergleichen mit den Richtungsvektoren der Geraden

$$\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -7/3 \\ -4/3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle = \langle \begin{pmatrix} 1 \\ -7/3 \\ -4/3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2\cdot 1 - 1\cdot 1 \\ 1\cdot 3 - (-2)\cdot 1 \\ (-2)\cdot 1 - 2\cdot 3 \end{pmatrix} \rangle = \langle \begin{pmatrix} 1 \\ -7/3 \\ -4/3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ -8 \end{pmatrix} \rangle = -\frac{6}{3} - \frac{35}{3} + \frac{32}{3} = 0.$$

Es gibt also einen Schnittpunkt. Seien s und t Zahlen, sodass

$$\vec{S} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 10/3 \\ 4/3 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} 1 \\ -7/3 \\ -4/3 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = t\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Wir berechnen t. Sei $\vec{w} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Dieser Vektor steht senkrecht auf $\begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, also $\langle \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, w\rangle = 0$. Dann folgt auch aus der obigen Gleichung

$$\langle t\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, w\rangle = \langle \begin{pmatrix} 1 \\ -7/3 \\ -4/3 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, w\rangle = \langle \begin{pmatrix} 1 \\ -7/3 \\ -4/3 \end{pmatrix}, w\rangle + \langle s\begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, w\rangle = \langle \begin{pmatrix} 1 \\ -7/3 \\ -4/3 \end{pmatrix}, w\rangle.$$

Es ist also einerseits

$$\langle t\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, w\rangle = t\langle \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \rangle = t(3+1) = 4t$$

und andererseits

$$\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -7/3 \\ -4/3 \end{pmatrix}, w\rangle = \langle \begin{pmatrix} 1 \\ -7/3 \\ -4/3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \rangle = 1 - \frac{7}{3} = -\frac{4}{3}.$$

Somit ist $4t = -\frac{4}{3} \Leftrightarrow t = -\frac{1}{3}$ und der Schnittpunkt

$$\vec{S} = \begin{pmatrix} -3 \\ 10/3 \\ 4/3 \end{pmatrix} - \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 2 Bringen Sie die folgenden Matrizen auf Zeilenstufenform und geben Sie jeweils den Rang der Matrix an.

(a) $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 & 3 \\ 3 & -2 & -1 & 4 \\ 2 & 4 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ (b) $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -6 & 2 \\ 0 & 1 & -3 & 0 \\ 1 & -2 & 3 & 1 \\ 4 & 0 & 8 & 0 \end{pmatrix}$ (c) $C = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -4 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ -6 & 7 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$

Lösungen zu Aufgabe 2

Zu (a):

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 & 3 \\ 3 & -2 & -1 & 4 \\ 2 & 4 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[]{\substack{3\text{I}-\text{II} \\ 2\text{I}-\text{III}}} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 & 3 \\ 0 & -4 & 7 & 5 \\ 0 & -8 & 3 & 5 \end{pmatrix} \xrightarrow{2\text{II}-\text{III}} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 & 3 \\ 0 & -4 & 7 & 5 \\ 0 & 0 & 11 & 5 \end{pmatrix}$$

Der Rang von A ist also gleich 3.

Zu (b):

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & -6 & 2 \\ 0 & 1 & -3 & 0 \\ 1 & -2 & 3 & 1 \\ 4 & 0 & 8 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[]{\substack{2\text{I}-\text{IV} \\ \text{I}-2\text{III}}} \begin{pmatrix} 2 & 0 & -6 & 2 \\ 0 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 4 & -12 & 0 \\ 0 & 0 & -20 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{4\text{II}-\text{III}} \begin{pmatrix} 2 & 0 & -6 & 2 \\ 0 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -20 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{III}\leftrightarrow\text{IV}} \begin{pmatrix} 2 & 0 & -6 & 2 \\ 0 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -20 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Der Rang von B ist also gleich 3.

Zu (c): Der Rang von C ist gleich 4, denn:

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -4 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ -6 & 7 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{4\mathrm{I}+3\mathrm{II} \\ 2\mathrm{I}+\mathrm{III} \\ I-3\mathrm{IV}}} \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 6 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 7 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & -9 & -3 & -6 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{7\mathrm{II}-6\mathrm{III} \\ 3\mathrm{II}+2\mathrm{IV}}} \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 6 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & -6 & 0 & 16 \\ 0 & 0 & -6 & -12 & 14 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\mathrm{III}-\mathrm{IV}} \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 6 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & -6 & 0 & 16 \\ 0 & 0 & 0 & 12 & 2 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 3 Bestimmen Sie die folgenden Produkte.

(a) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1/6 & 0 \\ 0 & -5/24 & -1/4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -7 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$

(b) $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 13 & -2 \\ -3 & 7 & -4 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -4 & 5 & -6 \\ -7 & 8 & -9 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ (c) $\begin{pmatrix} 3 & 2 & 6 \\ 1 & 1 & 3 \\ -3 & -2 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -4 & 3 & -3 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Lösungen zu Aufgabe 3

(a) Wir von rechts nach links:

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1/6 & 0 \\ 0 & -5/24 & -1/4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -7 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \\ = & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1/6 & 0 \\ 0 & -5/24 & -1/4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -7 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 7 & 8 & 9 \\ 0 & 5 & 6 \end{pmatrix} \\ = & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1/6 & 0 \\ 0 & -5/24 & -1/4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -6 & -12 \\ 0 & 5 & 6 \end{pmatrix} \\ = & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1/6 & 0 \\ 0 & -5/24 & -1/4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -12 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

(b)

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 13 & -2 \\ -3 & 7 & -4 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -4 & 5 & -6 \\ -7 & 8 & -9 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -83 & 97 & -109 \\ -3 & 9 & -15 \end{pmatrix}$$

(c)

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 6 \\ 1 & 1 & 3 \\ -3 & -2 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -4 & 3 & -3 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 4 Sei die Matrix $\mathscr{A}$ gegeben durch

$$\mathscr{A} = \begin{pmatrix} 5 & -7 & -11 & -1 \\ -8 & 4 & -4 & 16 \\ 3 & 2 & 12 & -13 \end{pmatrix}.$$

(a) Bestimmen Sie den Spaltenrang von $\mathscr{A}$, indem Sie eine Basis des Bildraumes $\{\mathscr{A}\cdot\vec{x} \mid \vec{x}\in\mathbb{R}^4\}$ angeben.

(b) Geben Sie eine Basis des Nullraumes $N_{\mathscr{A}} := \{\vec{x}\in\mathbb{R}^4 \mid \mathscr{A}\cdot\vec{x}=\vec{0}\}$ von $\mathscr{A}$ an.

(c) Was ist die Lösungsmenge $\mathscr{L}(\mathscr{A},\vec{b}) := \{\vec{x}\in\mathbb{R}^4 \mid \mathscr{A}\cdot\vec{x}=\vec{b}\}$, wobei $\vec{b}=\begin{pmatrix}-14\\8\\4\end{pmatrix}$?

Lösungen zu Aufgabe 4

(a) Zunächst bestimmen wir eine Basis des Bildraumes. Wir stellen zwei Methoden vor.

1. Methode: Wir berechnen die Determinanten von

$$\begin{pmatrix}5&-7&-11\\-8&4&-4\\3&2&12\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}5&-7&-1\\-8&4&16\\3&2&-13\end{pmatrix},\begin{pmatrix}5&-11&-1\\-8&-4&16\\3&12&-13\end{pmatrix}\quad\text{und}\quad\begin{pmatrix}-7&-11&-1\\4&-4&16\\2&12&-13\end{pmatrix}$$

und stellen fest, dass alle verschwinden. D.h. je drei Spaltenvektoren aus der Matrix $\mathscr{A}$ sind linear abhängig. Die Dimension des Bildraume ist somit kleiner gleich 2. Es ist leicht zu sehen, dass die ersten beiden Spaltenvektoren linear unabhängig sind, da $\begin{pmatrix}5\\-8\\3\end{pmatrix}$ kein Vielfaches von $\begin{pmatrix}-7\\4\\2\end{pmatrix}$ ist. Eine Basis des Bildraumes bilden somit die Vektoren $\begin{pmatrix}5\\-8\\3\end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix}-7\\4\\2\end{pmatrix}$. Die Dimension und daher der Zeilenrang sind gleich 2. Da der Zeilenrang gleich dem Spaltenrang ist, ist letzterer ebenfalls gleich 2.

2. Methode: Diese Methode gilt allgemeiner. Wir suchen Linearkombinationen der Spaltenvektoren, sodass möglichst viele Spalten verschwinden. Dies ist gleichbedeutend, auf die Matrix $\mathscr{A}$ Spaltenoperationen oder auf die folgende transponierte Matrix von $\mathscr{A}$ Zeilenoperationen anzuwenden:

$$\mathscr{A}^t=\begin{pmatrix}5&-8&3\\-7&4&2\\-11&-4&12\\-1&16&-13\end{pmatrix}.$$

Wir wenden Zeilenoperationen auf $\mathscr{A}^t$ an:

$$\begin{pmatrix}5&-8&3\\-7&4&2\\-11&-4&12\\-1&16&-13\end{pmatrix}\xrightarrow{\substack{7\mathrm{I}+5\mathrm{II}\\11\mathrm{I}+5\mathrm{III}\\\mathrm{I}+5\mathrm{IV}}}\begin{pmatrix}5&-8&3\\0&-36&31\\0&-108&93\\0&72&-62\end{pmatrix}\xrightarrow{\substack{(-3)\mathrm{II}+\mathrm{III}\\2\mathrm{II}+\mathrm{III}}}\begin{pmatrix}5&-8&3\\0&-36&31\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$$

Eine Basis bilden also $\begin{pmatrix}5\\-8\\3\end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix}0\\-36\\31\end{pmatrix}$. Die gleiche Argumentation wie in der 1. Methode liefert, dass der Spaltenrang gleich 2 ist. Dieser ist natürlich auch an der Matrix $\mathscr{A}^t$ nach den Zeilenoperationen ablesbar.

(b)

$$\begin{pmatrix}5&-7&-11&-1\\-8&4&-4&16\\3&2&12&-13\end{pmatrix}\xrightarrow{\substack{8\mathrm{I}+5\mathrm{II}\\3\mathrm{I}-5\mathrm{III}}}\begin{pmatrix}5&-7&-11&-1\\0&-36&-108&72\\0&-31&-93&62\end{pmatrix}\xrightarrow{\substack{\frac{31}{36}\mathrm{II}-\mathrm{III}\\\frac{1}{36}\mathrm{II}}}\begin{pmatrix}5&-7&-11&-1\\0&-1&-3&2\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

Die Vektoren $\begin{pmatrix}-2\\-3\\1\end{pmatrix}$ 0 und $\begin{pmatrix}3\\2\\0\end{pmatrix}$ 1 bilden eine Basis des Nullraumes $N_{\mathscr{A}}$.

(c) Mit den gleichen Zeilenoperationen wie in (b) erhält man

$$\left(\begin{array}{cccc|c}5&-7&-11&-1&-14\\-8&4&-4&16&8\\3&2&12&-13&4\end{array}\right)\xrightarrow{\substack{8\mathrm{I}+5\mathrm{II}\\3\mathrm{I}-5\mathrm{III}}}\left(\begin{array}{cccc|c}5&-7&-11&-1&-14\\0&-36&-108&72&-72\\0&-31&-93&62&-62\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[\frac{1}{36}\mathrm{II}]{\frac{31}{36}\mathrm{II}-\mathrm{III}} \left(\begin{array}{cccc|c} 5 & -7 & -11 & -1 & -14 \\ 0 & -1 & -3 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Es ist also $\mathscr{L}(\mathscr{A},\vec{b}) = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} 0 + \mathbb{R} \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} 0 + \mathbb{R} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} 1.$