Übungsblatt 7

Mathematik für Ingenieure (Maschinenbauer und Sicherheitstechniker), 1. Semester, bei Prof. Dr. G. Herbort im WiSe13/14 – Dipl.-Math. T. Pawlaschyk, 03.12.13

Themen: Vektor- und Matrixrechnung im $\mathbb{R}^n$

Aufgabe 1

(i) Eine Gerade $G \subset \mathbb{R}^n$ ist durch $G := \vec{A} + \mathbb{R}\vec{v}$ zu beschreiben, wobei $\vec{v} \neq \vec{0}$. Zeigen Sie: 2 Geraden $G_1 := \vec{A}_1 + \mathbb{R}\vec{v}_1$ und $G_2 := \vec{A}_2 + \mathbb{R}\vec{v}_2$ schneiden sich nicht, wenn $\vec{A}_2 - \vec{A}_1, \vec{v}_1$ und $\vec{v}_2$ linear unabhängig sind.

(ii) Überprüfen Sie, ob sich folgende Geraden im $\mathbb{R}^3$ schneiden oder windschief liegen, d.h. sich nicht schneiden und auch nicht parallel verlaufen.

$$\text{(a) } G_1 = \begin{pmatrix}1\\3\\0\end{pmatrix} + \mathbb{R}\begin{pmatrix}-7\\4\\13\end{pmatrix} \quad \text{und} \quad G_2 = \begin{pmatrix}0\\2\\-8\end{pmatrix} + \mathbb{R}\begin{pmatrix}1\\1\\-19\end{pmatrix}$$

$$\text{(b) } G_1 = \begin{pmatrix}-2\\1\\0\end{pmatrix} + \mathbb{R}\begin{pmatrix}-2\\2\\1\end{pmatrix} \quad \text{und} \quad G_2 = \begin{pmatrix}-3\\10/3\\4/3\end{pmatrix} + \mathbb{R}\begin{pmatrix}3\\1\\1\end{pmatrix}$$

Berechnen Sie ggf. den Schnittpunkt.

Aufgabe 2 Bringen Sie die folgenden Matrizen auf Zeilenstufenform und geben Sie jeweils den Rang der Matrix an.

$$\text{(a) } A = \begin{pmatrix}1 & -2 & 2 & 3\\3 & -2 & -1 & 4\\2 & 4 & 1 & 1\end{pmatrix} \quad \text{(b) } B = \begin{pmatrix}2 & 0 & -6 & 2\\0 & 1 & -3 & 0\\1 & -2 & 3 & 1\\4 & 0 & 8 & 0\end{pmatrix} \quad \text{(c) } C = \begin{pmatrix}3 & 0 & 0 & 0 & 1\\-4 & 2 & 0 & 0 & 0\\-6 & 7 & 1 & 0 & 0\\1 & 3 & 1 & 2 & 0\end{pmatrix}$$

Aufgabe 3 Bestimmen Sie die folgenden Produkte.

$$\text{(a) } \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\0 & -1/6 & 0\\0 & -5/24 & -1/4\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\-7 & 1 & 0\\0 & 0 & 1\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 0 & 1\\0 & 1 & 0\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\0 & 5 & 6\\7 & 8 & 9\end{pmatrix}$$

$$\text{(b) } \begin{pmatrix}2 & -1 & 13 & -2\\-3 & 7 & -4 & 0\end{pmatrix} \begin{pmatrix}1 & -2 & 3\\-4 & 5 & -6\\-7 & 8 & -9\\0 & -1 & 2\end{pmatrix} \qquad \text{(c) } \begin{pmatrix}3 & 2 & 6\\1 & 1 & 3\\-3 & -2 & -5\end{pmatrix} \begin{pmatrix}1 & -2 & 0\\-4 & 3 & -3\\1 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

Aufgabe 4 Sei die Matrix $\mathscr{A}$ gegeben durch

$$\mathscr{A} = \begin{pmatrix} 5 & -7 & -11 & -1 \\ -8 & 4 & -4 & 16 \\ 3 & 2 & 12 & -13 \end{pmatrix}.$$

(a) Bestimmen Sie den Spaltenrang von $\mathscr{A}$, indem Sie eine Basis des Bildraumes $\{\mathscr{A} \cdot \vec{x} \mid \vec{x} \in \mathbb{R}^4\}$ angeben.

(b) Geben Sie eine Basis des Nullraumes $N_{\mathscr{A}} := \{\vec{x} \in \mathbb{R}^4 \mid \mathscr{A} \cdot \vec{x} = \vec{0}\}$ von $\mathscr{A}$ an.

(c) Was ist die Lösungsmenge $\mathscr{L}(\mathscr{A}, \vec{b}) := \{\vec{x} \in \mathbb{R}^4 \mid \mathscr{A} \cdot \vec{x} = \vec{b}\}$, wobei $\vec{b} = \begin{pmatrix} -14 \\ 8 \\ 4 \end{pmatrix}$?