

Lösungen zu Übungsblatt 6

Mathematik für Ingenieure (Maschinenbauer und Sicherheitstechniker), 1. Semester, bei Prof. Dr. G. Herbort im WiSe13/14 – Dipl.-Math. T. Pawlaschky, 26.10.13

Themen: Vektorrechnung im $\mathbb{R}^n$, Lineare Hülle, Basis

Aufgabe 1

a) Ein Tetraeder habe Ecken mit den Ortsvektoren $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -4 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 6 \\ -1 \\ -7 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$. Berechnen Sie sein Volumen.

b) Seien die Ebene E und die Gerade g wie folgt gegeben:

$$E = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 0\} \quad \text{und} \quad g = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^3 \mid -x_1 + 2x_2 + 7x_3 = 3, x_2 - 2x_3 = -2\}$$

(i) Bestimmen Sie drei Vektoren $\vec{v}_1, \vec{v}_2$ und $\vec{v}_3$, so dass $E = \text{Lin}\{\vec{v}_1, \vec{v}_2\}$ und $g = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \mathbb{R}\vec{v}_3$.

(ii) Projizieren Sie die Gerade g auf die Ebene E .

Lösungen zu Aufgabe 1

(a) Wir drücken die Seiten des Tetraeders mit Hilfe der Vektoren

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 6 \\ -1 \\ -7 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \vec{c} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

und berechnen die Determinante der von $\vec{a}, \vec{b}$ und $\vec{c}$ gebildeten Matrix:

$$\langle \vec{a}, \vec{b} \times \vec{c} \rangle = \left\langle \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \cdot 3 - (-3) \cdot 1 \\ (-3) \cdot 1 - 4 \cdot 3 \\ 4 \cdot 1 - 0 \cdot 1 \end{pmatrix} \right\rangle = \left\langle \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ -15 \\ 4 \end{pmatrix} \right\rangle = 6 - 45 + 4 = -35.$$

Somit ist beträgt das Volumen $35/6$ VE.

(bi) Die Ebene E ist gegeben durch die Bedingung $x_1 = 2x_2 - 3x_3$, also

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x_2 - 3x_3 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = x_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Somit ist

$$E = \mathbb{R} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \mathbb{R} \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Die Bedingungen für g sind $x_1 = 2x_2 + 7x_3 - 3$ und $x_2 = -2 + 2x_3$. Letztere Bedingung setzen wir in die erste ein und erhalten

$$x_1 = 2 \cdot (-2 + 2x_3) + 7x_3 - 3 = -4 + 4x_3 + 7x_3 - 3 = 11x_3 - 7.$$

Für Punkte auf g gilt dann

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11x_3 - 7 \\ -2 + 2x_3 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} 11 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} + (t+1) \begin{pmatrix} 11 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 11 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

für $x_3 = t + 1$ und $t \in \mathbb{R}$.

(bii) Die Projektion der Geraden $\vec{B} + \mathbb{R}\vec{v}$ auf die Ebene $E = \vec{A} + \mathbb{R}\vec{v}_1 + \mathbb{R}\vec{v}_2$ ist gegeben durch

$$\vec{B} + \frac{\langle \vec{A} - \vec{B}, \vec{n} \rangle}{\|\vec{n}\|^2} \vec{n} + \mathbb{R}(\vec{v} - \vec{v}_{\vec{n}}),$$

wobei $\vec{n} = \vec{v}_1 \times \vec{v}_2$ und $\vec{v}_{\vec{n}} = \frac{\langle \vec{v}, \vec{n} \rangle}{\|\vec{n}\|^2} \vec{n}$.

Es sind

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 1 - 0 \cdot 0 \\ 0 \cdot (-3) - 2 \cdot 1 \\ 2 \cdot 0 - 1 \cdot (-3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

und $\|\vec{n}\| = \sqrt{1+4+9} = \sqrt{14}$. Wir berechnen

$$\vec{v}_{\vec{n}} = \frac{\langle \begin{pmatrix} 11 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} \rangle}{14} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} = \frac{10}{14} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} = \frac{5}{7} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

und

$$P_E(\vec{B}) = \vec{B} + \frac{\langle \vec{A} - \vec{B}, \vec{n} \rangle}{\|\vec{n}\|^2} \vec{n} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} \rangle}{14} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 7 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Also ist die Projektion die Gerade

$$\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 7 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \mathbb{R} \left[\begin{pmatrix} 11 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{5}{7} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} \right] = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 7 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \mathbb{R} \begin{pmatrix} 9 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 2

Seien folgende Vektoren gegeben:

$$\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{v}_3 = \begin{pmatrix} -7 \\ 1 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{v}_4 = \begin{pmatrix} -13 \\ 0 \\ 13 \\ 0 \end{pmatrix}$$

und

$$\vec{w}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{w}_2 = \begin{pmatrix} 10 \\ -1 \\ -7 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{w}_3 = \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \\ -9 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Zeigen Sie, dass $\text{Lin}\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3, \vec{v}_4\} = \text{Lin}\{\vec{w}_1, \vec{w}_2, \vec{w}_3\}$.

Lösungen zu Aufgabe 2 Bei dieser Aufgabe stellen wir drei Methoden vor, die zur Lösung führen.

(i) Durch genaues Hingucken stellen wir fest, dass

$$w_1 = v_1 - v_2, \quad w_2 = v_2 - v_3 \quad \text{und} \quad w_3 = v_3 - v_4$$

ist. Damit ist $\text{Lin}\{w_1, w_2, w_3\} \subset \text{Lin}\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$. Umgekehrt kann man umstellen und erhält die Beziehungen

$$v_1 = w_2 - w_3, \quad v_2 = w_2 - w_1 - w_3, \quad v_3 = -w_1 - w_3 \quad \text{und} \quad v_4 = -w_1 - 2w_3.$$

Somit gilt auch $\text{Lin}\{w_1, w_2, w_3\} \supset \text{Lin}\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$, also Gleichheit.

(ii) Nun kann man solche Beziehungen nicht immer sofort feststellen. Eine simple, aber rechenintensive Methode ist die folgende. Um zu prüfen, ob w_1, w_2, w_3 in $\text{Lin}\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ enthalten sind, muss man folgendes Gleichungssystem auf Lösbarkeit überprüfen:

$$\left(\begin{array}{cccc|c|c|c} v_1 & v_2 & v_3 & v_4 & w_1 & w_2 & w_3 \end{array} \right).$$

(Letztere Schreibweise bedeutet, dass man drei Gleichungssysteme hat. Da wir für alle drei Gleichungssysteme auf der linken Seite dieselben Operationen ausführen, können wir alle drei von vornherein in eine erweiterte Matrix schreiben.)

Umgekehrt erhalten wir die Teilmengenbeziehung $\text{Lin}\{w_1, w_2, w_3\} \supset \text{Lin}\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ durch die Lösbarkeit von

$$\left(\begin{array}{ccc|c|c|c|c} w_1 & w_2 & w_3 & v_1 & v_2 & v_3 & v_4 \end{array} \right).$$

Wir werden diese Methode in der nächsten verwenden, sparen an dieser Stelle eine detaillierte Rechnung und verweisen auf die dritte Methode.

(iii) Wir zeigen die Teilmengenbeziehung $\text{Lin}\{w_1, w_2, w_3\} \supset \text{Lin}\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ durch das Überprüfen der Lösbarkeit des erweiterten Gleichungssystems

$$\left(\begin{array}{ccc|c|c|c|c} w_1 & w_2 & w_3 & v_1 & v_2 & v_3 & v_4 \end{array} \right).$$

und vergleichen die Dimension der jeweiligen Räume $\text{Lin}\{w_1, w_2, w_3\}$ und $\text{Lin}\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$, indem wir die Matrizen

$$(v_1 \ v_2 \ v_3 \ v_4) \quad \text{und} \quad (w_1 \ w_2 \ w_3)$$

auf Zeilenstufenform bringen. Wir lösen also zunächst das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} & \left(\begin{array}{ccc|c|c|c|c} 1 & 6 & 10 & 4 & 3 & -7 & -13 \\ -2 & 1 & -1 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 5 & -9 & -7 & 2 & -3 & 4 & 13 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{array} \right) \\ & \xrightarrow{\substack{2\text{I} + \text{II} \\ (-5)\text{I} + \text{III}}} \left(\begin{array}{ccc|c|c|c|c} 1 & 6 & 10 & 4 & 3 & -7 & -13 \\ 0 & 13 & 19 & 6 & 6 & -13 & -26 \\ 0 & -39 & -57 & -18 & -18 & 39 & 78 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{array} \right) \\ & \xrightarrow{3\text{II} + \text{II}} \left(\begin{array}{ccc|c|c|c|c} 1 & 6 & 10 & 4 & 3 & -7 & -13 \\ 0 & 13 & 19 & 6 & 6 & -13 & -26 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{array} \right) \\ & \xrightarrow{\text{III} \leftrightarrow \text{IV}} \left(\begin{array}{ccc|c|c|c|c} 1 & 6 & 10 & 4 & 3 & -7 & -13 \\ 0 & 13 & 19 & 6 & 6 & -13 & -26 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \end{aligned}$$

Das Gleichungssystem ist also lösbar und wir erhalten

$$\text{Lin}\{v_1, v_2, v_3, v_4\} \subset \text{Lin}\{w_1, w_2, w_3\}.$$

Darüberhinaus hat das System $(w_1 \ w_2 \ w_3)$ den Rang gleich 3, d.h. die Dimension von $\text{Lin}\{w_1, w_2, w_3\}$ ist gleich 3. Wir bringen das System $(v_1 \ v_2 \ v_3 \ v_4)$ auf Zeilenstufenform:

$$\begin{pmatrix} -13 & -7 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 13 & 4 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{I}+\text{II}} \begin{pmatrix} -13 & -7 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & -3 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{3\text{II}+\text{III}} \begin{pmatrix} -13 & -7 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \\ \xrightarrow{\text{III} \leftrightarrow \text{IV}} \begin{pmatrix} -13 & -7 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Dieses System hat ebenfalls Rang gleich 3. Deshalb ist die Dimension von $\text{Lin}\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ gleich 3. Daher muss

$$\text{Lin}\{v_1, v_2, v_3, v_4\} = \text{Lin}\{w_1, w_2, w_3\}$$

gelten.

Aufgabe 3

Sei $V = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^4 \mid x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 5x_4 = 0\}$. Zeigen Sie, dass $V = \text{Lin}(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3)$, wobei

$$\vec{u}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{u}_2 = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \vec{u}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Lösungen zu Aufgabe 3

Da $V \neq \mathbb{R}^4$ ist, ist die Dimension von V kleiner gleich 3. Die Vektoren u_1, u_2 und u_3 sind in V enthalten. Dies sieht man leicht, indem man prüft, ob die Einträge der Vektoren die Gleichung $x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 5x_4 = 0$ erfüllen. Somit hat man $\text{Lin}\{u_1, u_2, u_3\} \subset V$. Wir zeigen, dass die Dimension von $\text{Lin}\{u_1, u_2, u_3\}$ genau gleich 3 ist, indem wir das System $(u_1 \ u_2 \ u_3)$ auf Zeilenstufenform bringen:

$$\begin{pmatrix} 0 & 3 & 5 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{I} \leftrightarrow \text{IV}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 5 \end{pmatrix} \xrightarrow{\begin{matrix} \text{I} - \text{II} \\ \text{I} - \text{III} \end{matrix}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 5 \end{pmatrix} \\ \xrightarrow{(-3)\text{III} + \text{IV}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{\begin{matrix} \text{II} \leftrightarrow \text{III} \\ (-2)\text{II} + \text{IV} \end{matrix}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Der Rang ist also gleich drei und deswegen auch die Dimension von $\text{Lin}\{u_1, u_2, u_3\}$. Damit haben wir $\text{Lin}\{u_1, u_2, u_3\} = V$.

Aufgabe 4

Seien $U_1 := \{\vec{x} \in \mathbb{R}^4 \mid 3x_1 - x_2 + 4x_3 + 5x_4 = 0\}$ und $U_2 := \{\vec{x} \in \mathbb{R}^4 \mid 2x_1 - 7x_2 + 9x_3 + x_4 = 0\}$ Hyperebenen im $\mathbb{R}^4$. Bestimmen Sie eine Basis für $U := U_1 \cap U_2$ und geben Sie die Dimension von U an.

Lösungen zu Aufgabe 4

Punkte aus U erfüllen die Gleichung:

$$x_2 = 3x_1 + 4x_3 + 5x_4$$

Dies setzen wir in die andere Bedingung ein und erhalten:

$$2x_1 - 7(3x_1 + 4x_3 + 5x_4) + 9x_3 + x_4 = 2x_1 - 21x_1 - 28x_3 - 35x_4 + 9x_3 + x_4 = -19x_1 - 19x_3 - 34x_4 = 0$$

Die erste Gleichung stellen wir um und setzen dieses Ergebnis ein:

$$\begin{aligned}
 19x_2 &= 19 \cdot (3x_1 + 4x_3 + 5x_4) \\
 &= 3 \cdot 19x_1 + 76x_3 + 95x_4 \\
 &= 3 \cdot (-19x_3 - 34x_4) + 76x_3 + 95x_4 \\
 &= -57x_3 - 102x_4 + 76x_3 + 95x_4 \\
 &= 19x_3 - 7x_4
 \end{aligned}$$

Also insgesamt

$$19\vec{x} = \begin{pmatrix} 19x_1 \\ 19x_2 \\ 19x_3 \\ 19x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -19x_3 - 34x_4 \\ 19x_3 - 7x_4 \\ 19x_3 \\ 19x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -19 \\ 19 \\ 19 \\ 0 \end{pmatrix} x_3 + \begin{pmatrix} -34 \\ -7 \\ 0 \\ 19 \end{pmatrix} x_4.$$

Es ist also $U = \text{Lin}\left\{\begin{pmatrix} -19 \\ 19 \\ 19 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -34 \\ -7 \\ 0 \\ 19 \end{pmatrix}\right\}$. Da diese Vektoren offensichtlich linear unabhängig sind, ist die Dimension von U gleich 2.