Übungsblatt 6

Mathematik für Ingenieure (Maschinenbauer und Sicherheitstechniker), 1. Semester, bei Prof. Dr. G. Herbort im WiSe13/14 – Dipl.-Math. T. Pawlaschyk, 26.10.13

Themen: Vektorrechnung im $\mathbb{R}^n$, Lineare Hülle, Basis

Aufgabe 1

a) Ein Tetraeder habe Ecken mit den Ortsvektoren $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -4 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 6 \\ -1 \\ -7 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$. Berechnen Sie sein Volumen.

b) Seien die Ebene E und die Gerade g wie folgt gegeben:

$$E = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 0\} \quad \text{und} \quad g = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^3 \mid -x_1 + 2x_2 + 7x_3 = 3,\ x_2 - 2x_3 = -2\}$$

(i) Bestimmen Sie drei Vektoren $\vec{v}_1, \vec{v}_2$ und $\vec{v}_3$, so dass $E = \mathrm{Lin}\{\vec{v}_1, \vec{v}_2\}$ und $g = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \mathbb{R}\vec{v}_3$.

(ii) Projizieren Sie die Gerade g auf die Ebene E.

Aufgabe 2

Seien folgende Vektoren gegeben:

$$\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{v}_3 = \begin{pmatrix} -7 \\ 1 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{v}_4 = \begin{pmatrix} -13 \\ 0 \\ 13 \\ 0 \end{pmatrix}$$

und

$$\vec{w}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{w}_2 = \begin{pmatrix} 10 \\ -1 \\ -7 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{w}_3 = \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \\ -9 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Zeigen Sie, dass $\mathrm{Lin}(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3, \vec{v}_4) = \mathrm{Lin}(\vec{w}_1, \vec{w}_2, \vec{w}_3)$.

Aufgabe 3

(a) Sei $V = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^4 \mid x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 5x_4 = 0\}$. Zeigen Sie, dass $V = \mathrm{Lin}(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3)$, wobei

$$\vec{u}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \vec{u}_2 = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \vec{u}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 4

Seien $U_1 := \{\vec{x} \in \mathbb{R}^4 \mid 3x_1 - x_2 + 4x_3 + 5x_4 = 0\}$ und $U_2 := \{\vec{x} \in \mathbb{R}^4 \mid 2x_1 - 7x_2 + 9x_3 + x_4 = 0\}$ Hyperebenen im $\mathbb{R}^4$. Bestimmen Sie eine Basis für $U := U_1 \cap U_2$ und geben Sie die Dimension von U an.