Übungsblatt 5

Mathematik für Ingenieure (Maschinenbauer und Sicherheitstechniker), 1. Semester, bei Prof. Dr. G. Herbort im WiSe13/14 – Dipl.-Math. T. Pawlaschyk, 19.11.13

Themen: Vektorrechnung im $\mathbb{R}^2$ und $\mathbb{R}^3$

Aufgabe 1

In der Ebene sei das Dreieck D gegeben durch die Eckpunkte $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$. Geben Sie eine allgemeine Formel für den Schwerpunkt von D an.

Lösungen zu Aufgabe 1

Die Punkte $\vec{m}_1 = \frac{1}{2}(\vec{b}+\vec{c})$ und $\vec{m}_2 = \frac{1}{2}(\vec{a}+\vec{c})$ halbieren die Strecke $\overline{BC}$ bzw. die Strecke $\overline{AC}$. Die Geraden $g_1 = \vec{a} + \mathbb{R}(\vec{m}_1 - \vec{a})$ und $g_2 = \vec{b} + \mathbb{R}(\vec{m}_2 - \vec{b})$ beinhalten die entsprechenden Seitenhalbierenden und schneiden sich im Schwerpunkt von D. Für den Schnittpunkt gilt

$$\vec{S} = \vec{a} + \frac{\det(\vec{b}-\vec{a}, \vec{m}_2 - \vec{b})}{\det(\vec{m}_1 - \vec{a}, \vec{m}_2 - \vec{b})}(\vec{m}_1 - \vec{a}).$$

Im Folgenden benutzen wir die Regeln $\det(\vec{u}, \vec{v}+\vec{w}) = \det(\vec{u},\vec{v}) + \det(\vec{u},\vec{w})$, $\lambda\det(\vec{v},\vec{w}) = \det(\lambda\vec{v},\vec{w})$, $\det(\vec{v},\vec{w}) = -\det(\vec{w},\vec{v})$ und $\det(\vec{v},\vec{v}) = 0$.

$$\begin{aligned}
\frac{\det(\vec{b}-\vec{a}, \vec{m}_2 - \vec{b})}{\det(\vec{m}_1 - \vec{a}, \vec{m}_2 - \vec{b})} &= \frac{\det(\vec{b}-\vec{a}, \frac{\vec{a}+\vec{c}-2\vec{b}}{2})}{\det(\frac{\vec{b}+\vec{c}-2\vec{a}}{2}, \frac{\vec{a}+\vec{c}-2\vec{b}}{2})} \\
&= \frac{\det(\vec{b}-\vec{a}, \frac{\vec{a}+\vec{c}-2\vec{b}}{2})}{\det(\frac{\vec{a}+\vec{c}-2\vec{b}}{2} + \frac{3(\vec{b}-\vec{a})}{2}, \frac{\vec{a}+\vec{c}-2\vec{b}}{2})} \\
&= \frac{\det(\vec{b}-\vec{a}, \frac{\vec{a}+\vec{c}-2\vec{b}}{2})}{\det(\frac{\vec{a}+\vec{c}-2\vec{b}}{2}, \frac{\vec{a}+\vec{c}-2\vec{b}}{2}) + \det(\frac{3(\vec{b}-\vec{a})}{2}, \frac{\vec{a}+\vec{c}-2\vec{b}}{2})} \\
&= \frac{\det(\vec{b}-\vec{a}, \frac{\vec{a}+\vec{c}-2\vec{b}}{2})}{0 + \frac{3}{2}\det(\vec{b}-\vec{a}, \frac{\vec{a}+\vec{c}-2\vec{b}}{2})} \\
&= \frac{2}{3}
\end{aligned}$$

Oben eingesetzt ergibt dies also

$$\vec{S} = \vec{a} + \frac{2}{3}(\vec{m}_1 - \vec{a}) = \vec{a} + \frac{2}{3}\cdot\frac{\vec{b}+\vec{c}-2\vec{a}}{2} = \frac{\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}}{3}.$$

Nun betrachten wir die Schnitte der anderen Seitenhalbierenden und erhalten immer denselben Schnittpunkt $\vec{S}$.

Aufgabe 2

Sei $x > 0$. Berechnen Sie den Flächeninhalt des Vierecks mit Eckpunkten $\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}4\\3\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}8+x\\4\end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix}7\\-x\end{pmatrix}$. Wie muss x gewählt werden, damit der Flächeninhalt 48 FE beträgt?

Lösungen zu Aufgabe 2

Wir setzen $\vec{a} = \begin{pmatrix} 7 \\ -x \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 8+x \\ 4 \end{pmatrix}$ und $\vec{c} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$. Wir teilen das Viereck in zwei Dreiecke D_1 und D_2, die von $\vec{a}$ und $\vec{b}$ bzw. $\vec{b}$ und $\vec{c}$ aufgespannt werden. Deren Flächeninhalt kann mit der Determinante der jeweils aufspannenden Vektoren berechnet werden, d.h.

$$A_1 = |\det \begin{pmatrix} 4 & 8+x \\ 3 & 4 \end{pmatrix}| = |16 - 24 - 3x| = 3x + 8$$

und

$$A_2 = |\det \begin{pmatrix} 7 & 8+x \\ -x & 4 \end{pmatrix}| = x^2 + 8x + 28$$

Der Flächeninhalt des Dreiecks ist somit $\frac{1}{2}(A_1 + A_2) = \frac{1}{2}(x^2 + 11x + 36)$. Soll die Fläche genau 48 ergeben, so müssen wir die Gleichung $x^2 + 11x + 36 = 96$, also $x^2 + 11x - 60 = 0$ lösen. Die Lösungen sind $x_1 = 4$ und $x_2 = -15$. Das gesuchte x ist also $x_1 = 4$.

Aufgabe 3

Überprüfen Sie jeweils, ob folgende Vektoren $\vec{u}$, $\vec{v}$ und $\vec{w}$ linear unabhängig sind, und schreiben Sie ggf. den Vektor $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ als Linearkombination von $\vec{u}$, $\vec{v}$ und $\vec{w}$.

(a) $\vec{u} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\vec{v} = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\vec{w} = \begin{pmatrix} -1 \\ -5 \\ 0 \end{pmatrix}$ (b) $\vec{u} = \begin{pmatrix} -5 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}$, $\vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{w} = \begin{pmatrix} 5 \\ -4 \\ -7 \end{pmatrix}$

Lösungen zu Aufgabe 3

(a) Wir lösen das folgende Gleichungssystem:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 4 & -1 & 1 \\ -1 & -3 & -5 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & -1 \end{array}\right) \xrightarrow{\text{I}\leftrightarrow\text{III}} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & 0 & -1 \\ -1 & -3 & -5 & 0 \\ 0 & 4 & -1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{\text{I}+2\text{II}} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & -4 & -10 & -1 \\ 0 & 4 & -1 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{\text{II}+\text{III}} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & -4 & -10 & -1 \\ 0 & 0 & -11 & 0 \end{array}\right)$$

Die Vektoren sind also linear unabhängig. Als Lösungen erhält man also $x_1 = -\frac{3}{4}$, $x_2 = \frac{1}{4}$ und $x_3 = 0$, also:

$$(-3/4) \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + \frac{1}{4} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} + 0 \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ -5 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

(b) Wir lösen das folgende Gleichungssystem:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -5 & 2 & 5 & 1 \\ 0 & 4 & -4 & 0 \\ 5 & 0 & -7 & -1 \end{array}\right) \xrightarrow{\text{II}\leftrightarrow\text{III}} \left(\begin{array}{ccc|c} -5 & 2 & 5 & 1 \\ 5 & 0 & -7 & -1 \\ 0 & 4 & -4 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{\text{I}+\text{II}} \left(\begin{array}{ccc|c} -5 & 2 & 5 & 1 \\ 0 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & 4 & -4 & 0 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{\text{II}+\text{III}} \left(\begin{array}{ccc|c} -5 & 2 & 5 & 1 \\ 0 & 2 & -2 & 0 \end{array}\right)$$

Die Vektoren sind also linear abhängig. Es gilt dennoch:

$$(-1/5)\cdot\begin{pmatrix}-5\\0\\5\end{pmatrix}+0\cdot\begin{pmatrix}2\\4\\0\end{pmatrix}+0\cdot\begin{pmatrix}5\\-4\\-7\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}$$

Aufgabe 4

Sei E die Ebene, die die Punkte $\begin{pmatrix}0\\0\\20\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}1\\0\\17\end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix}0\\1\\19\end{pmatrix}$ enthält.

(a) Schreiben Sie E in Parameterform.

(b) Geben Sie einen Vektor $\vec{n}$ der Länge 1 an, der zur Ebene E senkrecht ist.

(c) Bestimmen Sie den Schnittpunkt von E mit der Geraden $G=\begin{pmatrix}3\\1\\-2\end{pmatrix}+\mathbb{R}\begin{pmatrix}2\\-2\\0\end{pmatrix}$.

(d) Welchen Abstand hat $\vec{P}=\begin{pmatrix}2\\2\\7\end{pmatrix}$ von der Geraden G aus Teil c)?

Lösungen zu Aufgabe 4

(a) Die Parameterform von E sieht wie folgt aus:

$$E=\begin{pmatrix}0\\0\\20\end{pmatrix}+\mathbb{R}\left[\begin{pmatrix}1\\0\\17\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0\\0\\20\end{pmatrix}\right]+\mathbb{R}\left[\begin{pmatrix}0\\1\\19\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0\\0\\20\end{pmatrix}\right]=\begin{pmatrix}0\\0\\20\end{pmatrix}+\mathbb{R}\begin{pmatrix}1\\0\\-3\end{pmatrix}+\mathbb{R}\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}$$

(b) Das Vektorprodukt der beiden Richtungsvektoren steht senkrecht auf E:

$$\begin{pmatrix}1\\0\\-3\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\cdot(-1)-(-3)\cdot 1\\(-3)\cdot 0-1\cdot(-1)\\1\cdot 1-0\cdot 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\1\\1\end{pmatrix}.$$

Die Länge des Vektors ist $\|\begin{pmatrix}3\\1\\1\end{pmatrix}\|=\sqrt{9+1+1}=\sqrt{11}$. Der gesuchte Vektor ist also $\vec{n}=\frac{1}{\sqrt{11}}\begin{pmatrix}3\\1\\1\end{pmatrix}$.

(c) Gesucht sind zwei Zahlen s_1, s_2 und eine Zahl t, so dass

$$\begin{pmatrix}0\\0\\20\end{pmatrix}+s_1\begin{pmatrix}1\\0\\-3\end{pmatrix}+s_2\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\1\\-2\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}2\\-2\\0\end{pmatrix}.$$

Dies führt zum erweiterten Gleichungssystem:

$$\left(\begin{array}{ccc|c}1&0&-2&3\\0&1&2&1\\-3&-1&0&-22\end{array}\right)\xrightarrow{\text{II}\leftrightarrow\text{III}}\left(\begin{array}{ccc|c}1&0&-2&3\\-3&-1&0&-22\\0&1&2&1\end{array}\right)\xrightarrow{3\text{I}+\text{II}}\left(\begin{array}{ccc|c}1&0&-2&3\\0&1&2&1\\0&1&2&1\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{\text{II}+\text{III}}\left(\begin{array}{ccc|c}1&0&-2&3\\0&-1&-6&-13\\0&0&-4&-12\end{array}\right)$$

Für $t=3$ setzen wir in die Geradengleichung ein. Der Schnittpunkt ist somit

$$\begin{pmatrix}3\\1\\-2\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}2\\-2\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\1\\-2\end{pmatrix}+3\begin{pmatrix}2\\-2\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}9\\-5\\-2\end{pmatrix}.$$

(d) Der Abstand von $\vec{P}$ zur Geraden G wird bestimmt durch die Formel

$$d(\vec{P}, G) = \frac{\|(\vec{P} - \vec{A}) \times \vec{v}\|}{\|\vec{v}\|} = \frac{\| \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 9 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} \|}{\| \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} \|} = \frac{\| \begin{pmatrix} 1 \cdot 0 - 9 \cdot (-2) \\ 9 \cdot 2 - (-1) \cdot 0 \\ (-1) \cdot (-2) - 1 \cdot 2 \end{pmatrix} \|}{\sqrt{8}} = \frac{1}{2\sqrt{2}} \| \begin{pmatrix} 18 \\ 18 \\ 0 \end{pmatrix} \| = \frac{18\sqrt{2}}{2\sqrt{2}} = 9.$$