Lösungen zu Übungsblatt 4

Mathematik für Ingenieure (Maschinenbauer und Sicherheitstechniker), 1. Semester, bei Prof. Dr. G. Herbort im WiSe13/14 – Dipl.-Math. T. Pawlaschyk, 12.11.13

Themen: Induktion, Vektorrechnung im $\mathbb{R}^2$

Aufgabe 1 Beweisen Sie jeweils folgende Gleichheit für alle $n \in \mathbb{N}$: $\sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$

Lösungen zu Aufgabe 1

Induktionsanfang: Für $n = 1$ steht auf beiden Seiten eine Eins.

Induktionsschritt $n \to n+1$:

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n+1} k^3 &= \sum_{k=1}^{n} k^3 + (n+1)^3 \\
&\overset{\text{I.V.}}{=} \frac{n^2(n+1)^2}{4} + (n+1)^3 \\
&= \frac{n^2(n+1)^2 + 4(n+1)^3}{4} \\
&= \frac{(n^2 + 4(n+1))(n+1)^2}{4} \\
&= \frac{(n^2 + 4n + 4)(n+1)^2}{4} \\
&= \frac{(n+2)^2(n+1)^2}{4}
\end{aligned}$$

Aufgabe 2 Zeigen Sie induktiv, dass für alle $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, gilt:

$$\left(1 - \frac{1}{2}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{3}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{4}\right) \cdot \ldots \cdot \left(1 - \frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n}$$

Lösungen zu Aufgabe 2

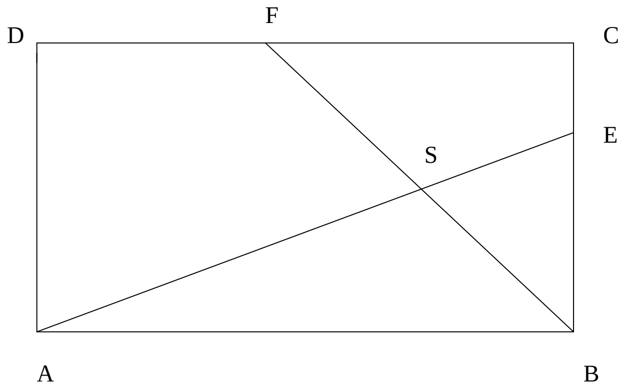
Induktionsanfang: Für $n = 2$ steht auf beiden Seiten $\frac{1}{2}$.

Induktionsschritt $n \to n+1$:

$$\begin{aligned}
\left(1 - \frac{1}{2}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{3}\right) \cdot \ldots \cdot \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) &= \left(1 - \frac{1}{2}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{3}\right) \cdot \ldots \cdot \left(1 - \frac{1}{n}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) \\
&\overset{\text{I.V.}}{=} \frac{1}{n} \cdot \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) \\
&= \frac{1}{n} \cdot \frac{n}{n+1} \\
&= \frac{1}{n+1}
\end{aligned}$$

Aufgabe 3 (a) Seien die Punkte $\vec{a} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \end{pmatrix}$ gegeben. Bestimmen Sie den Punkt $\vec{c}$, der die Strecke $\overline{AB}$ im Verhältnis 3:2 teilt.

(b) Gegeben sei das folgende Rechteck:



Dabei teilt E die Strecke BC im Verhältnis $3:1$ und F die Strecke CD im Verhältnis $4:3$. In welchem Verhältnis wird AE durch S geteilt?

Lösungen zu Aufgabe 3

(a) Es ist

$$\begin{aligned}
\vec{c} &= \vec{a} + \frac{3}{5}(\vec{b} - \vec{a}) \\
&= \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{3}{5}\left[\begin{pmatrix} 3 \\ 6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}\right] \\
&= \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{3}{5}\begin{pmatrix} 5 \\ 5 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} + 3\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

(b) Wir betrachten den Vektorzug

$$\vec{AS} + \vec{SB} + \vec{BA} = 0$$

und umschreiben diesen nur mit Hilfe von zwei linear unabhängigen Vektoren, nämlich $\vec{AB}$ und $\vec{BC}$. Der Punkt S ist der Schnittpunkt der Stecken $\overline{AE}$ und $\overline{BF}$. Also gibt es zwei Zahlen s, t mit

$$\vec{AS} = t\vec{AE} \quad \text{und} \quad \vec{BS} = s\vec{BF}.$$

Nach Voraussetzungen gilt

$$\vec{AE} = \vec{AB} + \frac{3}{4}\vec{BC} \quad \text{und} \quad \vec{BF} = \vec{BC} - \frac{4}{7}\vec{AB}.$$

Beachte, dass in dem Rechteck $\vec{CD} = -\vec{AB}$ gilt. All diese Informationen ergeben insgesamt:

$$\begin{aligned}
0 &= \vec{AS} + \vec{SB} + \vec{BA} \\
&= t\vec{AE} - s\vec{BF} - \vec{AB} \\
&= t(\vec{AB} + \frac{3}{4}\vec{BC}) - s(\vec{BC} - \frac{4}{7}\vec{AB}) - \vec{AB} \\
&= (t + \frac{4}{7}s - 1)\vec{AB} + (\frac{3}{4}t - s)\vec{BC}
\end{aligned}$$

Da $\vec{AB}$ und $\vec{BC}$ linear unabhängig sind, müssen ihre Koeffizienten in der obigen Gleichung verschwinden. Dies führt zum Gleichungssystem

$$\begin{aligned} t + \frac{4}{7}s &= 1 \\ \frac{3}{4}t - s &= 0 \end{aligned}$$

Die Lösung lautet $s = \frac{21}{40}$ und $t = \frac{7}{10}$. Der Punkt S teilt demnach die Strecke $\overline{AE}$ im Verhältnis $7 : 10 - 7$, also $7 : 3$.

Aufgabe 4 (a) Der Schwerpunkt eines Dreiecks ist definiert als der Schnittpunkt der 3 Seitenhalbierenden.

Bestimmen Sie den Schwerpunkt des Dreiecks, dessen Eckpunkte durch $\vec{A} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\vec{B} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$ und $\vec{C} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ gegeben sind.

(b) Sei G die Gerade durch $\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$. Welchen Abstand hat der Punkt $\vec{P} := \begin{pmatrix} 8 \\ 9 \end{pmatrix}$ von G? Welcher Punkt auf G hat von $\vec{P}$ den kleinsten Abstand?

Lösungen zu Aufgabe 4

(a) Der Punkt $\vec{u} = \vec{B} + \frac{1}{2}(\vec{C} - \vec{B}) = \frac{1}{2}(\vec{C} + \vec{B}) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ halbiert die Seite $\overline{BC}$. Der Punkt $\vec{v} = \frac{1}{2}(\vec{A} + \vec{C}) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ halbiert die Strecke $\overline{AC}$. Gesucht ist also der Schnittpunkt der beiden Geraden $G_1 = \vec{A} + \mathbb{R}(\vec{u} - \vec{A})$ und $G_2 = \vec{B} + \mathbb{R}(\vec{v} - \vec{B})$. Mit Hilfe der Formel aus der Vorlesung (Satz 2.1.2.1) lässt sich der Schnittpunkt berechnen und ist gleich

$$\vec{S} = \vec{A} + t(\vec{u} - \vec{A}) = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} + \frac{2}{3} \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix},$$

wobei

$$t = \frac{\det(\vec{B} - \vec{A}, \vec{v} - \vec{B})}{\det(\vec{u} - \vec{A}, \vec{v} - \vec{B})} = \frac{\begin{vmatrix} 2 & -4 \\ 4 & -3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -1 & -4 \\ 3 & -3 \end{vmatrix}} = \frac{2}{3}.$$

Der Schnittpunkt kann auch wie folgt berechnet werden

$$\vec{S} = \frac{1}{3}(\vec{A} + \vec{B} + \vec{C}) = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

(b) Die Gerade G hat die Parameterform

$$G = \vec{A} + \mathbb{R}\vec{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix} + \mathbb{R} \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix} + \mathbb{R} \left[\begin{pmatrix} -2 \\ 6 \end{pmatrix} \right].$$

Satz 2.1.3.1 aus der Vorlesung liefert, dass Abstand von $\vec{P}$ zu G gleich

$$\frac{\langle \vec{P} - \vec{A}, \vec{v} \rangle}{\|\vec{v}\|} = \frac{\langle \begin{pmatrix} 5 \\ 11 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 6 \end{pmatrix} \rangle}{\| \begin{pmatrix} -2 \\ 6 \end{pmatrix} \|} = \frac{28}{\sqrt{10}}$$

ist und der Punkt mit dem kleinsten Abstand von $\vec{P}$ zu G gerade

$$P_G(\vec{P}) = \vec{A} + \frac{28}{\sqrt{10}} + \vec{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix} + \frac{28}{\sqrt{10}} \begin{pmatrix} -2 \\ 6 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{10}} \begin{pmatrix} 3\sqrt{10} - 28 \\ -2\sqrt{10} + 168 \end{pmatrix}$$