Lösungen zu Übungsblatt 2

Mathematik für Ingenieure (Maschinenbauer und Sicherheitstechniker), 1. Semester, bei Prof. Dr. G. Herbort im WiSe13/14 – Dipl.-Math. T. Pawlaschyk, 29.10.13

Themen: Termumformungen, quadratische Gleichungen

Aufgabe 1

Erweitern Sie jeweils den Bruch derart, dass im Nenner keine Wurzeln und im gesamten Bruch keine Klammern mehr stehen.

$$\text{(a)}\ \frac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{b}} \qquad \text{(b)}\ \frac{x+y}{\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{xy}} \qquad \text{(c)}\ \frac{\sqrt{x-1}}{\sqrt[3]{(x-1)^2}}$$

Lösungen zu Aufgabe 1

(a) Wir erweitern den Bruch mit $\sqrt{a}-\sqrt{b}$ und benutzen die dritten binomischen Formel:

$$\frac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{b}} = \frac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{(\sqrt{a}+\sqrt{b})(\sqrt{a}-\sqrt{b})} = \frac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{a-b}$$

(b) Wir benutzen Aufgabe 2, Teil (c) und erweitern den Bruch mit $x^{2/3}-(x^2y)^{1/3}+(xy)^{2/3}$:

$$\begin{aligned}
\frac{x+y}{\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{xy}} &= \frac{x+y}{x^{1/3}+(xy)^{1/3}}\\
&= \frac{x+y}{x^{1/3}-(-xy)^{1/3}}\\
&= \frac{(x+y)(x^{2/3}-(x^2y)^{1/3}+(xy)^{2/3})}{(x^{1/3}-(-xy)^{1/3})(x^{2/3}-(x^2y)^{1/3}+(xy)^{2/3})}\\
&= \frac{(x+y)(x^{2/3}-(x^2y)^{1/3}+(xy)^{2/3})}{x-(-xy)}\\
&= \frac{x^{5/3}-x^{5/3}y^{1/3}+x^{5/3}y^{2/3}+x^{2/3}y-x^{2/3}y^{4/3}+x^{2/3}y^{5/3}}{x+xy}
\end{aligned}$$

(c) Wir erweitern mit $\sqrt[3]{x-1}$ und erhalten

$$\frac{\sqrt{x-1}}{\sqrt[3]{(x-1)^2}} = \frac{\sqrt{x-1}\cdot\sqrt[3]{x-1}}{\sqrt[3]{(x-1)^2}\cdot\sqrt[3]{x-1}} = \frac{\sqrt{x-1}\cdot\sqrt[3]{x-1}}{\sqrt[3]{(x-1)^3}} = \frac{\sqrt{x-1}\cdot\sqrt[3]{x-1}}{x-1}.$$

Alternativ vereinfachen wir zunächst mit Potenzgesetzen und lösen dann auf:

$$\begin{aligned}
\frac{\sqrt{x-1}}{\sqrt[3]{(x-1)^2}} &= \frac{(x-1)^{1/2}}{(x-1)^{2/3}} \\
&= (x-1)^{-1/6} \\
&= \frac{1}{\sqrt[6]{x-1}} \\
&= \frac{\sqrt[6]{(x-1)^5}}{\sqrt[6]{x-1}\cdot\sqrt[6]{(x-1)^5}} \\
&= \frac{\sqrt[6]{(x-1)^5}}{\sqrt[6]{(x-1)^6}} \\
&= \frac{\sqrt[6]{x^5-5x^4+10x^3-10x^2+5x-1}}{x-1}
\end{aligned}$$

Aufgabe 2

Hat ein Dreieck die Seiten a, b und c, so gilt für seinen Flächeninhalt F

$$16F^2 = 4b^2c^2 - (a^2-b^2-c^2)^2.$$

Formen Sie mit den binomischen Formeln diesen Ausdruck um, so dass

$$F = \sqrt{S(S-a)(S-b)(S-c)}$$

herauskommt, wobei $S = \frac{a+b+c}{2}$ sein soll.

Lösungen zu Aufgabe 2

Wir benutzen die 1., 2. und 3. binomische Formel.

$$\begin{aligned}
16F^2 &= 4b^2c^2 - (a^2-b^2-c^2)^2 \\
&\overset{3.}{=} (2bc + a^2 - b^2 - c^2)(2bc - (a^2-b^2-c^2)) \\
&= (a^2 - b^2 + 2bc - c^2)(2bc - a^2 + b^2 + c^2)) \\
&= [a^2 - (b^2 - 2bc + c^2)] \cdot [(b^2 + 2bc + c^2) - a^2)] \\
&\overset{2.,1.}{=} [a^2 - (b-c)^2] \cdot [(b+c)^2 - a^2] \\
&\overset{3.}{=} [a - (b-c)] \cdot [a + (b-c)] \cdot [(b+c) - a] \cdot [(b+c) + a] \\
&= (a-b+c)(a+b-c)(b+c-a)(a+b+c) \\
&= (a+b-2b+c)(a+b+c-2c)(b+c+a-2a)(a+b+c) \\
&= (2S-2b)(2S-2c)(2S-2a)2S \\
&= 16S(S-a)(S-b)(S-c)
\end{aligned}$$

Aufgabe 3

Bestimmen Sie die Lösungsmenge folgender Gleichungen.

(a) $x^2 + 4x = 8$ (b) $x^2 - \frac{\sqrt{22}}{13}x - 3 = 0$ (c) $x^2 + 19x + 101 = 0$

(d) $3x^2 + 4x - 10 = 0$ (e) $-5x^3 + 4x^2 = -10x$

Lösungen zu Aufgabe 3

Wir benutzen die pq-Formel. Ist die Gleichung $x^2 + px + q = 0$ gegeben, so wird sie gelöst durch die beiden Punkte

$$x_{1,2} = \frac{-p \pm \sqrt{p^2 - 4q}}{2},$$

falls die Diskriminante $\Delta := p^2 - 4q$ echt positiv ist. Ist $\Delta = 0$, so sind ist Lösungen $x = -p/2$.

(a)
1. Normierung: $x^2 + 4x = 8 \Leftrightarrow x^2 + 4x - 8 = 0$

2. p und q bestimmen: $p = 4$ und $q = -8$

3. Diskriminante: $4^2 - 4 \cdot (-8) = 16 + 32 = 48 > 0$

4. $x_{1,2} = \frac{-4 \pm \sqrt{48}}{2} = \frac{-4 \pm \sqrt{16 \cdot 3}}{2} = \frac{-4 \pm 4\sqrt{\cdot 3}}{2} = -2 \pm 2\sqrt{3}$

(b)
1. Normierung: $x^2 - \frac{\sqrt{22}}{13}x - 3 = 0$ ist bereits normiert und umgestellt.

2. p und q bestimmen: $p = -\frac{\sqrt{22}}{13}$ und $q = -3$

3. Diskriminante: $(-\frac{\sqrt{22}}{13})^2 - 4 \cdot (-3) = \frac{2050}{169} > 0$

4. $x_{1,2} = \frac{\frac{\sqrt{22}}{13} \pm \sqrt{\frac{2050}{169}}}{2} = \frac{\sqrt{22} \pm \sqrt{2050}}{2 \cdot 13} = \frac{\sqrt{22} \pm \sqrt{2050}}{26}$

(c)
1. Normierung: $x^2 + 19x + 101 = 0$ ist bereits normiert und umgestellt.

2. p und q bestimmen: $p = -19$ und $q = 101$

3. Diskriminante: $(-19)^2 - 4 \cdot 101 = -43 < 0$

4. Es gibt keine Lösung.

(d)
1. Normierung: $3x^2 + 4x - 10 = 0 \Leftrightarrow x^2 + (4/3)x - 10/3 = 0$

2. p und q bestimmen: $p = 4/3$ und $q = -10/3$

3. Diskriminante: $(4/3)^2 + 4 \cdot 10/3 = 136/9 > 0$

4. $x_{1,2} = \frac{-4/3 \pm \sqrt{136/9}}{2} = \frac{-4/3 \pm 2\sqrt{34}/3}{2} = \frac{-2 \pm \sqrt{34}}{3}$

(e)
Eine Lösung ist trivial, nämlich $x_1 = 0$. Für $x \neq 0$ können wir die Gleichung $-5x^3 + 4x^2 = -10x$ durch x teilen und erhalten die quadratische Gleichung $-5x^2 + 4x = -10$.

1. Normierung: $-5x^2 + 4x = -10 \Leftrightarrow -5x^2 + 4x + 10 = 0 \Leftrightarrow x^2 - (4/5)x - 2 = 0$

2. p und q bestimmen: $p = -4/5$ und $q = -2$

3. Diskriminante: $(-4/5)^2 - 4 \cdot (-2) = 216/25 > 0$

4. $x_1 = 0$ und $x_{2,3} = \frac{4/5 \pm \sqrt{216/25}}{2} = \frac{4/5 \pm 2\sqrt{54}/5}{2} = \frac{2 \pm \sqrt{54}}{5}$

Aufgabe 4

Lösen Sie die folgenden Gleichungen.

$$\text{(a)} \quad \sqrt{x+1} - \sqrt{3x+4} = -1 \qquad \text{(b)} \quad \sqrt{10-x} - \sqrt{3-x} = \frac{3}{\sqrt{3-x}}$$

Lösungen zu Aufgabe 4

(a)

$$
\begin{aligned}
& \sqrt{x+1}-\sqrt{3x+4}=-1 \\
\Rightarrow\quad & \left(\sqrt{x+1}-\sqrt{3x+4}\right)^2=1 \\
\Leftrightarrow\quad & x+1-2\sqrt{(x+1)(3x+4)}+3x+4=1 \\
\Leftrightarrow\quad & 4x+4=2\sqrt{(x+1)(3x+4)} \\
\Rightarrow\quad & (4x+4)^2=4(x+1)(3x+4) \\
\Leftrightarrow\quad & 4(x+1)^2=(x+1)(3x+4)
\end{aligned}
$$

Die Zahl $x_0 = -1$ löst die letzte Gleichung und ist sogar eine Lösung der Ausgangsgleichung. Dies stellt man durch Einsetzen fest. Ist $x_0 \neq -1$, so lässt sich der Term $x+1$ aus der letzten Gleichung herausdividieren. Man erhält:

$$4(x+1)=3x+4 \Leftrightarrow x=0.$$

Die Zahl $x_1 = 0$ ist ebenfalls eine Lösung der Ausgangsgleichung. Insgesamt sind die Lösungen also $x_0 = -1$ und $x_1 = 0$.

(b)

$$
\begin{aligned}
& \sqrt{10-x}-\sqrt{3-x}=\frac{3}{\sqrt{3-x}} \\
\Rightarrow\quad & \sqrt{(10-x)(3-x)}-(3-x)=3 \\
\Leftrightarrow\quad & \sqrt{(10-x)(3-x)}=3+3-x \\
\Rightarrow\quad & (10-x)(3-x)=(6-x)^2 \\
\Leftrightarrow\quad & 30-13x+x^2=36-12x+x^2 \\
\Leftrightarrow\quad & x=-6
\end{aligned}
$$

Durch Einsetzen in die Ausgangsgleichung sieht man, dass $x=-6$ die Gleichung löst.