Lösungen zu Übungsblatt 1

Mathematik für Ingenieure (Maschinenbauer und Sicherheitstechniker), 1. Semester, bei Prof. Dr. G. Herbort im WiSe13/14 – Dipl.-Math. T. Pawlaschyk, 22.10.13

Themen: Mengen und Potenzen

Aufgabe 1

(a) Seien A, B, C Teilmengen der Menge $M = \{1, 2, \dots, 10\} \subset \mathbb{N}$, wobei

$$A = \{x \in M \mid 2 \text{ teilt } x\},\ B = \{x \in M : \exists\, k \in \mathbb{N} \text{ mit } x = 3k\},\ C = \{x \in M \mid 5 \text{ teilt } x - 1\}.$$

(i) Beschreiben Sie jeweils A, B, C durch Aufzählung ihrer Elemente.

(ii) Bilden Sie die Mengen $A \cap B$, $A \cup B$, $A \cap (B \cup C)$, $(A \cap B) \cup C$ und $A^c \cap B^c$.

(b) Die symmetrische Differenz zweier Teilmengen A, B einer Menge M sei definiert durch

$$A \Delta B := (A^c \cap B) \cup (A \cap B^c).$$

Berechnen Sie $A \Delta B$, wobei A und B die Mengen aus Teil (a) sind.

Lösungen zu Aufgabe 1

(a) (i) Die Menge A sind die geraden Zahlen aus M, also $A = \{2, 4, 6, 8, 10\}$. Die Menge B ist die Menge aller Zahlen aus M, die durch 3 teilbar sind, also $B = \{3, 6, 9\}$. Schließlich ist $C = \{1, 6\}$, da nur $0 = 1 - 1$ und $5 = 6 - 1$ durch 5 teilbar sind.

(ii) Es sind

$$A \cap B = \{6\},\ B \cup C = \{1, 3, 6, 9\},\ C \setminus B = \{1\},\ A \cap (B \cup C) = \{6\}$$
$$(A \cap B) \cup C = \{1, 6\},\ A^c \cap B^c = (A \cup B)^c = \{1, 5, 7\}$$

(b) Die Menge $A \Delta B$ besteht aus den Elementen von M, die entweder in A oder in B liegen. Es ist also $A \Delta B = \{2, 3, 4, 8, 9, 10\}$

Aufgabe 2 Seien A, B, C Teilmengen einer Menge M.

Zeigen Sie mit Hilfe der Rechenregeln für Mengen folgende Gleichungen.

(a) $(A \cap B) \cap (B \cup C) = A \cap B$

(b) $(A \cup B \cup C)^c = A^c \cap B^c \cap C^c$

(c) $A \Delta B = (A \cup B) \cap (A \cap B)^c$

Lösungen zu Aufgabe 2

(a) Da $A \cap B \subset B \subset B \cup C$, gilt:

$$(A \cap B) \cap (B \cup C) = A \cap B.$$

$(\star)$ Anwendung des Distributivgesetzes
$(\star\star)$ da $A \cap B \cap B = A \cap (B \cap B) = A \cap B$
$(\star\star\star)$ da $A \cap B \cap C \subset A \cap B$

(b) Wie benutzen die DeMorgan-Regel zweimal:

$$\begin{aligned}(A \cup B \cup C)^c &= (A \cup (B \cup C))^c \\ &= A^c \cap (B \cup C)^c \\ &= A^c \cap B^c \cap C^c\end{aligned}$$

(c) Wir benutzen zuerst die DeMorgan-Regel und dann mehrfach das Distributivgesetz:

$$\begin{aligned}(A \cup B) \cap (A \cap B)^c &= (A \cup B) \cap (A^c \cup B^c) \\ &= [(A \cup B) \cap A^c] \cup [(A \cup B) \cap B^c] \\ &= [(A \cap A^c) \cup (B \cap A^c)] \cup [(A \cap B^c) \cup (B \cap B^c)] \\ &= [\emptyset \cup (B \cap A^c)] \cup [(A \cap B^c) \cup \emptyset] \\ &= (B \cap A^c) \cup (A \cap B^c) \\ &= (A^c \cap B) \cup (A \cap B^c) \\ &= A \Delta B\end{aligned}$$

Aufgabe 3 Vereinfachen Sie folgende Terme.

(a) $\dfrac{1}{\sqrt[3]{y^{-6}}} \cdot \sqrt[4]{x^2} \cdot \dfrac{1}{x^{-1/2}} \cdot x^{-1} \cdot y^{-1}$ (b) $\sqrt[n]{x^{n+2} \cdot y^{2n-1}}$

(c) $(x^{1/3} - y^{1/3})(x^{2/3} + (xy)^{1/3} + y^{2/3})$

Lösungen zu Aufgabe 3

(a) Wir wenden die Potenzgesetze mehrfach auf die einzelnen Faktoren an:

$$\begin{aligned}\frac{1}{\sqrt[3]{y^{-6}}} \cdot \sqrt[4]{x^2} \cdot \frac{1}{x^{-1/2}} \cdot x^{-1} \cdot y^{-1} &= y^{-(-6/3)} \cdot x^{2/4} \cdot x^{-(-1/2)} \cdot x^{-1} \cdot y^{-1} \\ &= y^2 \cdot x^{1/2} \cdot x^{1/2} \cdot x^{-1} \cdot y^{-1} \\ &= x^{(1/2)+(1/2)-1} \cdot y^{2-1} \\ &= x^0 \cdot y^1 = y\end{aligned}$$

(b) Wir gehen wie in (a) vor:

$$\begin{aligned}\sqrt[n]{x^{n+2} \cdot y^{2n-1}} &= \sqrt[n]{x^n \cdot x^2 \cdot y^{2n} \cdot y^{-1}} \\ &= \sqrt[n]{x^n} \cdot \sqrt[n]{x^2} \cdot \sqrt[n]{y^{2n}} \cdot \sqrt[n]{y^{-1}} \\ &= x^{n/n} \cdot x^{2/n} \cdot y^{2n/n} \cdot y^{-1/n} \\ &= x^1 \cdot x^{2/n} \cdot y^2 \cdot y^{-1/n} \\ &= x \cdot y^2 \cdot \sqrt[n]{x^2} \cdot \sqrt[n]{y^{-1}} \\ &= x \cdot y^2 \cdot \sqrt[n]{x^2 \cdot y^{-1}} \\ &= x \cdot y^2 \cdot \sqrt[n]{\frac{x^2}{y}}\end{aligned}$$

(c) Wir klammern distributiv aus:

$$\begin{aligned}(x^{1/3} - y^{1/3})(x^{2/3} + (xy)^{1/3} + y^{2/3}) &= x^{1/3} \cdot (x^{2/3}(xy)^{1/3} + y^{2/3}) - y^{1/3} \cdot (x^{2/3} + (xy)^{1/3} + y^{2/3}) \\ &= x^{1/3} \cdot x^{2/3} + x^{1/3} \cdot (xy)^{1/3} + x^{1/3} \cdot y^{2/3} \\ &\quad -y^{1/3} \cdot x^{2/3} - y^{1/3} \cdot (xy)^{1/3} - y^{1/3} \cdot y^{2/3} \\ &= x^{3/3} + x^{2/3} \cdot y^{1/3} + x^{1/3} \cdot y^{2/3} - y^{1/3} \cdot x^{2/3} - x^{1/3} \cdot y^{2/3} - y^{3/3} \\ &= x^1 - y^1 = x - y\end{aligned}$$

Aufgabe 4

(a) Bringen Sie folgende Terme auf einen Bruch.

$$\text{(i)}\ \frac{y^n}{\sqrt{x^n}} + \frac{\sqrt[3]{x^{2n}}}{y^{2n}} \qquad \text{(ii)}\ \frac{x}{\sqrt[3]{x+1}} + \frac{\sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{x-1}}$$

(b) Kürzen Sie, wenn möglich.

$$\text{(i)}\ \frac{x^3}{y^{1/2} \cdot x^{(2^3)}} \qquad \text{(ii)}\ \frac{3na^n + (n+1)(ab)^{2n}}{b\sqrt{a^{4n}} - 3\sqrt[7]{a^{14n}}}$$

Lösungen zu Aufgabe 4

Wie benutzen die Potenzgesetze, die in der Vorlesung vorgestellt wurden.

$$\begin{aligned}
\text{(a) (i)}\ \frac{y^n}{\sqrt{x^n}} + \frac{\sqrt[3]{x^{2n}}}{y^{2n}} &= \frac{y^n \cdot y^{2n} + \sqrt[3]{x^{2n}} \cdot \sqrt{x^n}}{\sqrt{x^n} \cdot y^{2n}} \\
&= \frac{y^{n+2n} + x^{\frac{2n}{3}} \cdot x^{\frac{n}{2}}}{\sqrt{x^n} \cdot y^{2n}} \\
&= \frac{y^{3n} + x^{\frac{2n}{3}+\frac{n}{2}}}{\sqrt{x^n} \cdot y^{2n}} \\
&= \frac{y^{3n} + x^{\frac{7n}{6}}}{\sqrt{x^n} \cdot y^{2n}} = \frac{y^{3n} + \sqrt[6]{x^{7n}}}{\sqrt{x^n} \cdot y^{2n}}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{(a) (ii)}\ \frac{x}{\sqrt[3]{x+1}} + \frac{\sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{x-1}} &= \frac{x \cdot \sqrt[3]{x-1} + \sqrt[3]{x} \cdot \sqrt[3]{x+1}}{\sqrt[3]{x+1} \cdot \sqrt[3]{x-1}} \\
&= \frac{x^{3/3} \cdot \sqrt[3]{x-1} + \sqrt[3]{x(x+1)}}{\sqrt[3]{(x+1)\cdot(x-1)}} \\
&= \frac{\sqrt[3]{x^3} \cdot \sqrt[3]{x-1} + \sqrt[3]{x(x+1)}}{\sqrt[3]{x^2-1}} \\
&= \frac{\sqrt[3]{x^3(x-1)} + \sqrt[3]{x(x+1)}}{\sqrt[3]{x^2-1}}
\end{aligned}$$

$$\text{(b) (i)}\ \frac{x^3}{y^{1/2} \cdot x^{(2^3)}} = \frac{x^3}{y^{1/2} \cdot x^8} = \frac{x^3}{y^{1/2} \cdot x^{5+3}} = \frac{x^3}{y^{1/2} \cdot x^5 \cdot x^3} = \frac{1}{y^{1/2} \cdot x^5}$$

$$\begin{aligned}
\text{(b) (ii)}\ \frac{3na^n + (n+1)(ab)^{2n}}{b\sqrt{a^{4n}} - 3\sqrt[7]{a^{14n}}} &= \frac{3na^n + (n+1)(a^{2n} \cdot b^{2n})}{ba^{\frac{4n}{2}} - 3a^{\frac{14n}{7}}} \\
&= \frac{3na^n + (n+1)(a^{2n} \cdot b^{2n})}{ba^{2n} - 3a^{2n}} \\
&= \frac{3na^n + (n+1)(a^n \cdot a^n \cdot b^{2n})}{(b-3)a^{2n}} \\
&= \frac{[3n + (n+1)(a^n \cdot b^{2n})] \cdot a^n}{(b-3)a^{2n}} \\
&= \frac{[3n + (n+1)(a^n \cdot b^{2n})] \cdot a^n}{(b-3)a^n \cdot a^n} \\
&= \frac{3n + (n+1)(a^n \cdot b^{2n})}{(b-3)a^n}
\end{aligned}$$