Bergische Universität Wuppertal WiSe13/14
Fachbereich C - Mathematik und Naturwissenschaften
Prof. Dr. N. V. Shcherbina
Dipl.-Math. T. Pawlaschyk
Klausur zu 'Elemente der Komplexen Analysis' 04.02.14

Aufgabe 1 Sei $\mathbb{C}^*$ versehen mit der Metrik $ds = |dz|/|z|^2$.

(a) (2 P) Berechnen Sie die Krümmung von ds.

(b) (4 P) Sei $z = x + iy \in \mathbb{C}$ mit $x > 0$ fest. Zudem seien zwei Kurven $\alpha, \beta : [0, 1] \to \mathbb{C}^*$ definiert durch
$$\alpha(t) = 1 + t(x - 1) \quad \text{und} \quad \beta(t) = x + ity.$$
Berechnen Sie die Länge von $\gamma := \alpha * \beta$ bezüglich der Metrik ds.

(c) (4 P) Zeigen Sie, dass $(\mathbb{C}^*, ds)$ nicht vollständig ist.

Lösungen zu Aufgabe 1

(a) Die Gaußsche Krümmung ist
$$K_{ds}(z) = -\frac{1}{|z|^4}\Delta \log(1/|z|^2) = \frac{2}{|z|^4}\Delta \log |z| = 0,$$
da $\Delta \log |f| = 0$ außerhalb $\{f = 0\}$ für jede holomorphe Funktion.

(b) Die Längen sind jeweils
$$L_{ds}(\alpha) = \int_0^1 \frac{|x-1|dt}{(1+t(x-1))^2} = \frac{|x-1|}{1-x}\left[\frac{1}{1+t(x-1)}\right]_{t=0}^1 = \frac{|x-1|}{1-x}\left(\frac{1}{x} - 1\right) = \frac{|x-1|}{x}$$
und
$$L_{ds}(\beta) = \int_0^1 \frac{|y|dt}{|x+ity|^2} = \int_0^1 \frac{|y|dt}{x^2+t^2y^2} = \frac{|y|}{x^2}\int_0^1 \frac{dt}{1+\left(\frac{t|y|}{x}\right)^2} = \frac{1}{x}\left[\arctan\left(\frac{t|y|}{x}\right)\right]_{t=0}^1$$
$$= \frac{1}{x}\arctan\left(\frac{|y|}{x}\right).$$
Die Länge von γ ist also
$$L_{ds}(\gamma) = L_{ds}(\alpha) + L_{ds}(\beta) = \frac{|x-1|}{x} + \frac{1}{x}\arctan\left(\frac{|y|}{x}\right)$$

(c) Sei $D := \{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}(z) > 1\} \subset \mathbb{C}^*$. Für ein $z = x + iy \in D$ gilt dann
$$d_{ds}(z, 1) \le L_{ds}(\gamma) = \frac{|x-1|}{x} + \frac{1}{x}\arctan\left(\frac{|y|}{x}\right) \le \frac{x-1}{x} + \frac{1}{x}\cdot\frac{\pi}{2} < 1 + \frac{\pi}{2} =: R.$$
Das bedeutet, dass D in der ds-beschränkten Menge $\mathbb{D}_R^{ds}(1) = \{z \in \mathbb{C}^* : d_{ds}(z, 1) < R\}$ enthalten ist. D ist aber unbeschränkt in $\mathbb{C}$. Daher können $\mathbb{D}_R^{ds}(1)$ nicht kompakt und damit ds nicht vollständig sein.

Aufgabe 2 Seien $U := \mathbb{C} \setminus \partial\mathbb{D}$ und für $n \in \mathbb{N}$ die Funktionen

$$f_n(z) := \frac{1}{1-z} + \sum_{k=1}^{n} \frac{z^{2^{k-1}}}{z^{2^k}-1}$$

gegeben.

(a) (3 P) Zeigen Sie: $f_n(z) = \frac{1}{1-z^{2^n}}$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

(b) (2 P) Bestimmen Sie die Grenzfunktion f auf U.

(c) (5 P) Zeigen Sie, dass $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ auf U kompakt gegen f konvergiert.

Lösungen zu Aufgabe 2

(a) Wir zeigen die Gleichheit induktiv. Für $n = 1$ erhalten wir

$$f_1(z) = \frac{1}{1-z} + \frac{z}{z^2-1} = \frac{1}{1-z^2}.$$

Induktionsschritt $n \to n+1$:

$$\begin{aligned} f_{n+1}(z) &= \frac{1}{1-z} + \sum_{k=1}^{n+1} \frac{z^{2^{k-1}}}{z^{2^k}-1} = \frac{1}{1-z^{2^n}} + \frac{z^{2^n}}{z^{2^{n+1}}-1} \\ &= \frac{1+z^{2^n}}{(1-z^{2^n})(1+z^{2^n})} - \frac{z^{2^n}}{1-z^{2^{n+1}}} \\ &= \frac{1+z^{2^n}-z^{2^n}}{1-z^{2^{n+1}}} = \frac{1}{1-z^{2^{n+1}}} \end{aligned}$$

(b) Die Grenzfunktion lautet

$$f(z) = \begin{cases} 1, & z \in \mathbb{D} \\ 0, & z \in \mathbb{C} \setminus \overline{\mathbb{D}} \end{cases}.$$

(c) Sei $z \in U$ mit $|z| < r < 1$. Dann erhalten wir

$$|f_n(z) - f(z)| = |f_n(z) - f(z)| \leq \left| \frac{1}{1-z^{2^n}} - 1 \right| = \left| \frac{1-1+z^{2^n}}{1-z^{2^n}} \right| = \frac{|z|^{2^n}}{|1-z^{2^n}|} < \frac{r^{2^n}}{1-r^{2^n}}$$

Die Folge $\frac{r^{2^n}}{1-r^{2^n}}$ konvergiert gegen 0, da $0 < r < 1$, und sie ist unabhängig von z. Daher konvergiert f_n gegen 1 gleichmäßig auf jeder Kreisscheibe um 0 mit Radius $r < 1$ und damit kompakt auf $\mathbb{D}$.

Für $z \in U$ mit $|z| > R > 1$ ist

$$|f_n(z) - f(z)| = \left| \frac{1}{1-z^{2^n}} - 0 \right| < \frac{1}{R^{2^n}-1}.$$

Die Folge $\frac{1}{R^{2^n}-1}$ ist eine Nullfolge, da $R > 1$, und ebenfalls unabhängig von z. Deswegen konvergiert f_n gleichmäßig gegen f auf $\{|z| > R\}$ für jedes $R > 1$ und somit kompakt auf $\{|z| > 1\}$.

Insgesamt konvergiert f_n kompakt gegen f auf U.

Aufgabe 3 Sei $G = \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_0^-$ mit $\mathbb{R}_0^- = \{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Im}(z) = 0, \mathrm{Re(z)} \leq 0\}$.

(a) (2 P) Zeigen Sie, dass es eine biholomorphe Abbildung $H : \{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Re(z)} > 0\} \to G$ gibt.

(b) (6 P) Ist die Familie der holomorphen Abbildungen $f : \mathbb{D} \to G$ normal?

(c) (2 P) Was ist die Fundamentalgruppe von G?

Lösungen zu Aufgabe 3

(a) Die gesuchte Funktion ist z.B. $H(z) = z^2$. Sie ist bijektiv und holomorph auf $\{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Re(z)} > 0\}$ und damit biholomorph.

(b) Die Menge $\{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Re(z)} > 0\}$ ist biholomorph zur oberen Halbebene durch die Drehung $z \mapsto iz$. Die obere Halbebene ist biholomorph zur Einheitskreisscheibe. Mit Teil (a) gibt es also eine biholomorphe Abbildung G nach $\mathbb{D}$. Auf $\mathbb{D}$ exisitert eine vollständige, reguläre, stark negativ gekrümmte Metrik, also auch auf G. Nach dem Satz von Grauert-Reckziegel ist die Familie der holomorphen Abbildungen $\mathbb{D} \to G$ normal.

(c) Die Fundamentalgruppe von $\{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Re(z)} > 0\}$ ist trivial, da diese Menge konvex ist. Nach Teil (a) ist sie biholomorph (bzw. homöomorph) zu G. Also ist die Fundamentalgruppe von G ebenfalls trivial.

Aufgabe 4 (a) (3 P) Seien $f : X \to Y$ und $g : Y \to Z$ holomorphe Abbildung zwischen Riemannschen Flächen. Zeigen Sie, dass dann die Verknüpfung $g \circ f : X \to Z$ wieder holomorph ist.

(b) (7 P) Zeigen Sie, dass die folgende Abbildung $f : \hat{\mathbb{C}} \to \hat{\mathbb{C}}$ holomorph ist.

$$f(z) = \begin{cases} \frac{z}{z^2+1}, & z \in \mathbb{C} \setminus \{\pm i\} \\ \infty, & z = \pm i \\ 0 & z = \infty \end{cases}$$

Lösungen zu Aufgabe 3

(a) Seien (W_l, α_l), (V_j, ψ_j) und (U_k, φ_k) Karten auf X, Y und Z mit $(g \circ f)^{-1}(U_k) \cap V_j \neq \emptyset$, $f^{-1}(W_l) \cap V_j \neq \emptyset$ und $g^{-1}(U_k) \cap W_l \neq \emptyset$. Dann ist die Funktion

$$\varphi_k \circ (g \circ f) \circ \psi_j^{-1} = \varphi_k \circ g \circ (\alpha_l^{-1} \circ \alpha_l) \circ f \circ \psi_j^{-1} = (\varphi_k \circ g \circ \alpha_l^{-1}) \circ (\alpha_l \circ f \circ \psi_j^{-1})$$

eine Komposition von holomorphen Funktionen auf $\psi_j((g \circ f)^{-1}(U_k) \cap V_j) \subset \mathbb{C}$ und damit im Ganzen holomorph.

(b) Seien $\varphi_1 = \mathrm{id}_{\mathbb{C}}$ und $\varphi_2 : \hat{\mathbb{C}} \setminus \{0\} \to \mathbb{C}$ mit $\varphi_2(z) = \left\{ \begin{array}{ll} 1/z, & z \in \mathbb{C}^* \\ 0, & z = \infty \end{array} \right\}$ Karten auf $\hat{\mathbb{C}}$. Bezüglich dieser Karten hat die Funktion f folgende Darstellungen

$$\varphi_1 \circ f \circ \varphi_1^{-1} : \varphi_1(f^{-1}(\mathbb{C}) \cap \mathbb{C}) \to \mathbb{C}, \quad \varphi_1 \circ f \circ \varphi_1^{-1}(z) = \frac{z}{z^2+1}$$

$$\varphi_1 \circ f \circ \varphi_2^{-1} : \varphi_2(f^{-1}(\mathbb{C}) \cap \hat{\mathbb{C}} \setminus \{0\}) \to \mathbb{C}, \quad \varphi_1 \circ f \circ \varphi_2^{-1}(z) = \begin{cases} \frac{z}{1+z^2}, & z \in \mathbb{C} \setminus \{\pm i, 0\} \\ 0, & z = 0 \end{cases}$$

$$\varphi_2 \circ f \circ \varphi_1^{-1} : \varphi_1(f^{-1}(\hat{\mathbb{C}} \setminus \{0\}) \cap \mathbb{C}) \to \mathbb{C}, \quad \varphi_2 \circ f \circ \varphi_1^{-1}(z) = \begin{cases} \frac{1+z^2}{z}, & z \in \mathbb{C} \setminus \{\pm i\} \\ 0, & z = \pm i \end{cases}$$

$$\varphi_2 \circ f \circ \varphi_2^{-1} : \varphi_2(f^{-1}(\hat{\mathbb{C}} \setminus \{0\}) \cap (\hat{\mathbb{C}} \setminus \{0\}) \to \mathbb{C}, \quad \varphi_2 \circ f \circ \varphi_2^{-1}(z) = \begin{cases} \frac{1+z^2}{z}, & z \in \mathbb{C} \setminus \{\pm i, 0\} \\ 0, & z = \pm i \end{cases},$$

da

$$\begin{gathered} \varphi_1(f^{-1}(\mathbb{C}) \cap \mathbb{C}) = \varphi_1(\hat{\mathbb{C}} \setminus \{\pm i\} \cap \mathbb{C}) = \varphi_1(\mathbb{C} \setminus \{\pm i\}) = \mathbb{C} \setminus \{\pm i\} \\ \varphi_2(f^{-1}(\mathbb{C}) \cap \hat{\mathbb{C}} \setminus \{0\}) = \varphi_2(\hat{\mathbb{C}} \setminus \{\pm i\} \cap \hat{\mathbb{C}} \setminus \{0\}) = \varphi_2(\hat{\mathbb{C}} \setminus \{\pm i, 0\}) = \mathbb{C} \setminus \{\pm i\} \\ \varphi_1(f^{-1}(\hat{\mathbb{C}} \setminus \{0\}) \cap \mathbb{C}) = \varphi_1(\mathbb{C} \cap \mathbb{C}) = \mathbb{C} \\ \varphi_2(f^{-1}(\hat{\mathbb{C}} \setminus \{0\}) \cap \hat{\mathbb{C}} \setminus \{0\}) = \varphi_2(\mathbb{C} \cap (\hat{\mathbb{C}} \setminus \{0\})) = \varphi_2(\mathbb{C}^*) = \mathbb{C}^*. \end{gathered}$$

Alle oben beschriebenen Funktionen sind holomorph, da sie in den jeweiligen Lücken stetig sind. Dann sind sie schon überall holomorph.

Aufgabe 5 (a) (4 P) Gibt es eine holomorphe Überlagerungsabbildung $p : \mathbb{D} \to \mathbb{D} \setminus \{0\}$?

(b) (3 P) Bestimmen Sie alle holomorphen Polynome, die eine Überlagerungsabbildung $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$ bilden.

(c) (3 P) Kann es eine holomorphe Überlagerungsabbildung $\mathbb{D} \to \mathbb{C}$ geben?

Lösungen zu Aufgabe 5

(a) Ja, denn $\exp : \{\mathrm{Re}(z) < 0\} \to \mathbb{D} \setminus \{0\}$ ist eine holomorphe Überlagerung und $\{\mathrm{Re}(z) < 0\}$ ist biholomorph zu $\mathbb{H}$.

(b) Offensichtlich existiert überhaupt solch eine polynomielle Überlagerungsabbildung, z.B. $p(z) = z$, und solch eine Überlagerungsabbildung kann nicht konstant sein, da sie sonst nicht surjektiv wäre.

Sei also p ein beliebiges nicht-konstantes holomorphes Polynom, das eine Überlagerungsabbildung $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$ ist. Dann ist p' wieder ein holomorphes Polynom. Angenommen, p' sei nicht konstant. Dann hat p' nach dem Fundamentalsatz der Algebra eine Nullstelle in $\mathbb{C}$ und kann dort nicht lokal-biholomorph sein. Es folgt, dass p' konstant sein muss. Also gibt es ein $c \in \mathbb{C}^*$ mit $p'(z) = c$ für alle $z \in \mathbb{C}$ (für $c = 0$ wäre p konstant, was vorher ausgeschlossen wurde). Die Funktionen cz und p sind Stammfunktionen von p' auf $\mathbb{C}$. Da $\mathbb{C}$ einfach zusammenhängend ist, unterscheiden sie sich nur um eine Konstante $d \in \mathbb{C}$, also $p(z) = cz + d$. Dieses Polynom ist offensichtlich bijektiv von $\mathbb{C}$ nach $\mathbb{C}$ und damit eine Überlagerungabbildung.

(c) Angenommen, es gäbe eine Überlagerungsabbildung $p : \mathbb{D} \to \mathbb{C}$. Die universelle Überlagerung von $\mathbb{C}$ ist trivialerweise $\mathbb{C}$ mit der Projektion $\mathbb{C}$. Dann gibt es eine lokal-biholomorphe Abbildung $q : \mathbb{C} \to \mathbb{D}$ mit $\mathrm{id}_{\mathbb{C}} = q \circ p$. Nach dem Liouville-Satz ist die Abbildungen q konstant, also nicht lokal-biholomorph. Es gibt also keine derartige Überlagerungsabbildung.