Bergische Universität Wuppertal WiSe13/14
Fachbereich C - Mathematik und Naturwissenschaften
Prof. Dr. N. V. Shcherbina
Dipl.-Math. T. Pawlaschyk
Übungen zu 'Elemente der Komplexen Analysis' Blatt 10

Aufgabe 1 Sei $\hat{\mathbb{C}} := \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ gegeben. Wir sagen, eine Teilmenge $U \subset \hat{\mathbb{C}}$ sei offen, falls U eine offene Teilmenge von $\mathbb{C}$ ist oder falls es ein Kompaktum K in $\mathbb{C}$ gibt, sodass $U = (\mathbb{C} \setminus K) \cup \{\infty\}$ gilt. Zeigen Sie:

(a) Die offenen Mengen in $\hat{\mathbb{C}}$ bilden eine Topologie τ auf $\hat{\mathbb{C}}$.

(b) $(\hat{\mathbb{C}}, \tau)$ ist ein kompakter Hausdorffraum.

(c) $\hat{\mathbb{C}}$ ist eine Riemannsche Fläche. Betrachten Sie dazu die Abbildungen

$$\varphi_1 : \hat{\mathbb{C}} \setminus \{\infty\} \to \mathbb{C}, \qquad \varphi_1(z) = z$$

$$\text{und} \qquad \varphi_2 : \hat{\mathbb{C}} \setminus \{0\} \to \mathbb{C}, \qquad \varphi_2(z) = \begin{cases} \frac{1}{z}, & z \in \mathbb{C} \\ 0, & z = \infty \end{cases} .$$

Aufgabe 2 Seien $a, b, c, d \in \mathbb{C}$. Wir definieren die Abbildung $f : \hat{\mathbb{C}} \to \hat{\mathbb{C}}$, $f(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ im Fall $c \neq 0$ durch

$$f(z) := \begin{cases} \frac{az+b}{cz+d}, & z \in \mathbb{C} \setminus \{-\frac{d}{c}\} \\ \infty, & z = -\frac{d}{c} \\ \frac{a}{c}, & z = \infty \end{cases}$$

und im Fall $c = 0$ durch

$$f(z) := \begin{cases} \frac{az+b}{d}, & z \in \mathbb{C} \\ \infty, & z = \infty \end{cases} .$$

(a) Zeigen Sie, dass f eine holomorphe Abbildung ist.

(b) Zeigen Sie, dass f genau dann biholomorph ist, wenn $ad - bc \neq 0$ gilt.

Aufgabe 3 Zeigen Sie:

(a) Jedes Riemannsche Gebiet ist eine Riemannsche Fläche.

(b) Nicht jede Riemannsche Fläche muss ein Riemannsches Gebiet sein.

Aufgabe 4 (a) Sei $f : X \to Y$ eine holomorphe Abbildung zwischen Riemannschen Flächen, wobei X kompakt ist. Zeigen Sie, dass dann f konstant oder surjektiv ist.

(b) Folgern Sie, dass es keine nicht-konstante holomorphe Funktion $\hat{\mathbb{C}} \to \mathbb{C}$ geben kann.

Abgabe: 23.01.14 bis 10 Uhr auf D10, Fach 104 `www.kana.uni-wuppertal.de`