Bergische Universität Wuppertal WiSe13/14
Fachbereich C - Mathematik und Naturwissenschaften
Prof. Dr. N. V. Shcherbina
Dipl.-Math. T. Pawlaschyk
Übungen zu 'Elemente der Komplexen Analysis' Blatt 9

Aufgabe 1 Gegeben sei die Potenzreihe

$$g(z) := \sum_{k=0}^{\infty} z^{2^k}.$$

Zeigen Sie:

(a) g konvergiert kompakt in $\mathbb{D}$.

(b) Für jede Folge reeller Zahlen $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathbb{D}$ mit $\lim_{n\to\infty} x_n = 1$ gilt die Beziehung $\lim_{n\to\infty} g(x_n) = +\infty$.

(c) Es gilt: $g(z) = z + g(z^2)$.

(d) Für jede Folge $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathbb{D}$ mit $z_n = r_n \exp(2\pi i m/2^n)$, $m \in \mathbb{Z}$ und $\lim_{n\to\infty} r_n = 1$ gilt die Beziehung $\lim_{n\to\infty} g(z_n) = \infty$.

(e) Schließen Sie daraus, dass sich g nirgendwo über den Rand von $\mathbb{D}$ hinaus fortsetzen lässt.

Aufgabe 2 Sei p die Projektion von $\mathcal{O}_{\mathbb{C}}$ auf $\mathbb{C}$ definiert durch $p(\mathbf{g}) = z$ für $\mathbf{g} \in \mathcal{O}_z$. Zeigen Sie:

(a) Die Einschränkung von p auf $\sigma(g, V)$ ist injektiv für jede auf einer offenen Menge V in $\mathbb{C}$ holomorphen Funktion g.

(b) p ist lokal-topologisch.

Aufgabe 3 (a) Sei G in $\mathbb{C}$ ein Gebiet und $z \in G$ fest. Zeigen Sie, dass der Homomorphismus $\mathcal{O}(G) \to \mathcal{O}_z$ definiert durch $f \mapsto \rho_z(f)$ injektiv, aber nicht surjektiv ist.

(b) Sei $\mathbf{f} \in \mathcal{O}_{z_0}$ der Keim einer nicht-konstanten nahe z_0 holomorphen Funktion f mit $f(z_0) = w_0$. Für ein $\mathbf{g} \in \mathcal{O}_{w_0}$ definiere

$$\mathbf{f}^*\mathbf{g} := \mathbf{g} \circ \mathbf{f} := \rho_{z_0}(g \circ f),$$

wobei g ein Repräsentant von $\mathbf{g}$ ist. Zeigen Sie, dass $\mathbf{f}^* : \mathcal{O}_{w_0} \to \mathcal{O}_{z_0}$ einen injektiven Homomorphismus definiert. Wann ist er bijektiv?

Aufgabe 4 Analog zu $\mathcal{O}_{\mathbb{C}}$ kann man die Garbe $\mathcal{C}_{\mathbb{C}}$ der Keime der stetigen Funktionen definieren. Zeigen Sie, dass im Gegensatz zu $\mathcal{O}_{\mathbb{C}}$ die Garbe $\mathcal{C}_{\mathbb{C}}$ kein Hausdorff-Raum ist.

Abgabe: 16.01.14 bis 10 Uhr auf D10, Fach 104 `www.kana.uni-wuppertal.de`