Bergische Universität Wuppertal WiSe13/14
Fachbereich C - Mathematik und Naturwissenschaften
Prof. Dr. N. V. Shcherbina
Dipl.-Math. T. Pawlaschyk
Übungen zu 'Elemente der Komplexen Analysis' Blatt 7

Aufgabe 1 Seien zwei positive Zahlen $R > r > 0$ gegeben. Zeigen Sie, dass es auf $\mathbb{C}$ eine unendlich oft differenzierbare Funktion χ gibt, die auf $\mathbb{C} \setminus \overline{D_R(0)}$ verschwindet, auf dem Abschluss $\overline{D_r(0)}$ identisch Eins ist und die $0 < \chi < 1$ auf $D_R(0) \setminus \overline{D_r(0)}$ erfüllt. Untersuchen Sie dazu die Funktion

$$h(t) := \begin{cases} 0, & t \leq 0 \\ e^{-1/t^2}, & t > 0 \end{cases} .$$

Aufgabe 2 (a) Sei $G \subset \mathbb{C}$ ein konvexes Gebiet, d.h. für je zwei Punkte $z, w \in$ liegt die Strecke $[z, w]$ ebenfalls in G. Zeigen Sie, dass jeder Weg in G, der die Punkte $z_0, z_1 \in G$ verbindet, homotop in G zur Strecke $[z_0, z_1]$ ist.

(b) Seien $\gamma(t) = e^{it}$ und $\delta(t) = e^{it} - 2$, $t \in [0, 2\pi]$, zwei Wege. Zeigen Sie, dass γ und δ homotop in $\mathbb{C}$, aber nicht homotop in $\mathbb{C}^* = \mathbb{C} \setminus \{0\}$ sind.

Aufgabe 3 Gegeben sei eine Umgebung U der Eins, die die Null nicht enthält und auf der eine Logarithmusfunktion log mit $\log(1) = 0$ definiert ist.

(a) Zeigen Sie, dass sich log entlang eines beliebigen Weges in $\mathbb{C}^*$ fortsetzen lässt.

(b) Zeigen Sie, dass die so in einem Punkt $p \in \mathbb{C}^\star$ erhaltenen Fortsetzungen nicht unbedingt übereinstimmen.

Aufgabe 4 Seien G ein einfach zusammenhängendes Gebiet in $\mathbb{C}$, d.h. $\pi_1(G) = 0$, und f eine holomorphe Funktion ohne Nullstelle in G.

(a) Zeigen Sie, dass es eine holomorphe Funktion g auf G mit $g^2 = f$ gibt. (Wir schreiben dann $\sqrt{f} := g$).

(b) Ist die Aussage in (a) wahr, wenn G nur zusammenhängend (und offen) ist?

(c) Stimmt die Aussage in (a), wenn f eine Nullstelle in G besitzt?

Abgabe: 19.12.13 bis 10 Uhr auf D10, Fach 104 `www.kana.uni-wuppertal.de`