Aufgabe 1 Sei G ein Gebiet in $\mathbb{C}$. Zeigen Sie, dass es eine Folge von Kreisscheiben $(D_i)_{i\in\mathbb{N}}$ in G mit den Eigenschaften (a) $D_i \cap D_{i+1} \neq \emptyset$ für alle $i \in \mathbb{N}$ und (b) $\bigcup_{i=1}^{\infty} D_i = G$ gibt.

Aufgabe 2 Sei $\mathcal{O}(G)$ der Vektorraum der holomorphen Funktionen auf einem Gebiet $G \subset \mathbb{C}$. Wir definieren für ein Kompaktum K in G und eine positive Zahl $\varepsilon > 0$ die (K, ε)-*Kugel von* $g \in \mathcal{O}(G)$ durch

$$B_{K,\varepsilon}(g) := \{f \in \mathcal{O}(G) : \sup\{|f(z) - g(z)| : z \in K\} < \varepsilon\}.$$

Wir sagen, eine Familie $\mathcal{U} \subset \mathcal{O}(G)$ ist *offen*, falls jede Funktion $g \in \mathcal{U}$ eine (K, ε)-Umgebung $B_{K,\varepsilon}(g)$ besitzt, die ganz in $\mathcal{U}$ enthalten ist.

Eine Familie $\mathcal{A} \subset \mathcal{O}(G)$ heißt *c.o.-abgeschlossen*, falls für jede kompakt konvergente Folge $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ aus $\mathcal{A}$ ihr Grenzwert g auch wieder in $\mathcal{A}$ liegt.

Zeigen Sie folgende Aussagen:

(a) Die Menge $\tau := \{\mathcal{U} \subset \mathcal{O}(G) : \mathcal{U} \text{ offen}\}$ bildet eine Topologie auf $\mathcal{O}(G)$.

(b) Die Menge $\tau' := \{\mathcal{U}' = \mathcal{O}(G) \setminus \mathcal{A} : \mathcal{A} \text{ c.o.} - \text{abgeschlossen}\}$ bildet ebenfalls eine Topologie auf $\mathcal{O}(G)$.

(c) $\tau = \tau'$, d.h. $\mathcal{U} \subset \mathcal{O}(G)$ ist genau dann offen, wenn $\mathcal{O}(G) \setminus \mathcal{U}$ c.o.-abgeschlossen ist.

(d) Für ein festes $p \in G$ und $R > 0$ ist die Familie

$$\mathcal{K} := \{f \in \mathcal{O}(G) : f(p) = 0,\ |f(z)| < R\ \forall\ z \in G\}$$

beschränkt und (c.o.-) abgeschlossen.

(e) Zu jedem Kompaktum K in $\mathbb{C}$ und $\varepsilon > 0$ gibt es ein $a > 0$ mit

$$f_n^a \in B_{K,\varepsilon}(0) \text{ für alle } n \in \mathbb{N},$$

wobei $f_n^a(z) := a(1 + az + a^2z^2 + \ldots + a^n z^n)$, $z \in \mathbb{C}$.

(f) Sei $a > 0$ fest. $(f_n^a)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert nicht kompakt auf $\mathbb{C}$.

Aufgabe 3 Sei $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ gegeben durch

$$f(z) = z^2 - 1.$$

Für ein $k \in \mathbb{N}$ seien die iterierten Funktionen $f^k : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ definiert durch

$$f^k(z) = (\underbrace{f \circ f \circ \ldots \circ f}_{k-\text{mal}})(z).$$

(a) Finden Sie alle Fixpunkte der Abbildung f, d.h. $z \in \mathbb{C}$ mit $f(z) = z$.

(b) Sei z_0 ein Fixpunkt von f. Zeigen Sie, dass die Familie $\mathcal{F}_1 := \{f^n : n \in \mathbb{N}\}$ in keiner Umgebung von z_0 normal ist.

(c) Finden Sie die Fixpunkte von f^2.

(d) Sei z_1 ein Fixpunkt von f^2, der kein Fixpunkt von f ist. Zeigen Sie, dass die Familie $\mathcal{F}_2 := \{f^{2n} : n \in \mathbb{N}\}$ in einer Umgebung von z_1 normal ist. Ist dort auch $\mathcal{F}_1$ normal?