Bergische Universität Wuppertal WiSe13/14
Fachbereich C - Mathematik und Naturwissenschaften
Prof. Dr. N. V. Shcherbina
Dipl.-Math. T. Pawlaschyk
Übungen zu 'Elemente der Komplexen Analysis' Blatt 4

Aufgabe 1 (a) Gegeben seien die Funktionen $f_n(z) := \frac{1}{1+z^n}$, $n \in \mathbb{N}$. Bestimmen Sie größtmögliche Gebiete in $\mathbb{C}$, auf denen $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ kompakt konvergiert.

(b) Zeigen Sie: Ist $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Funktionenfolge holomorpher Funktionen auf einem Gebiet $G \subset \mathbb{C}$, die auf G kompakt gegen eine Funktion f konvergieren, so ist f ebenfalls holomorph auf G und die Folgen der k-ten Ableitungen $(f_n^{(k)})_{n\in\mathbb{N}}$ konvergieren kompakt auf G gegen die k-ten Ableitungen $f^{(k)}$ von f.

Aufgabe 2 Für $n \in \mathbb{N}$ sei $f_n : \mathbb{H} \to \mathbb{C}$ definiert durch $f_n(z) := \tan(nz)$. Zeigen Sie, dass die Funktionenfolge $(f_n)_{n\geq 1}$ auf $\mathbb{H}$ kompakt konvergiert.

Aufgabe 3 Sei $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Funktionenfolge stetiger Funktionen auf einem Gebiet G aus $\mathbb{C}$. Dann sind äquivalent:

(a) $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert kompakt auf G gegen eine Funktion f.

(b) $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *konvergiert lokal gleichmäßig auf G gegen f*, d.h. für jedes $z \in G$ gibt es eine offene Umgebung U in G derart, dass $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ auf U gleichmäßig konvergiert.

(c) $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *konvergiert stetig auf G gegen f*, d.h. für jede Folge $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ aus G mit Grenzwert $z_0 \in G$ gilt $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(z_n) = f(z_0)$.

Aufgabe 4 (a) Konstruieren Sie, falls möglich, eine Folge nicht-konstanter, holomorpher Funktionen $f_n : \mathbb{D} \to \mathbb{C}$, die kompakt gegen den Rand von $\mathbb{C}$ konvergiert.

(b) Konstruieren Sie, falls möglich, eine Folge nicht-konstanter, holomorpher Funktionen $f_n : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$, die kompakt gegen den Rand von $\mathbb{D}$ konvergiert.

(c) Konstruieren Sie, falls möglich, eine Folge nicht-konstanter, holomorpher Funktionen $f_n : \mathbb{C} \to \mathbb{D}$, die kompakt gegen den Rand von $\mathbb{D}$ konvergiert.

(d) Konstruieren Sie, falls möglich, eine Folge nicht-konstanter, holomorpher Funktionen $f_n : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, die kompakt gegen den Rand von $\mathbb{C}$ konvergiert.

Abgabe: 28.11.13 bis 10 Uhr auf D10, Fach 104 `www.kana.uni-wuppertal.de`