Aufgabe 1 Gegeben sei die Einheitskreisscheibe $\mathbb{D}$ versehen mit der hyperbolischen Metrik

$$ds = |dz|/(1 - |z|^2).$$

(a) Zeigen Sie, dass die Strecke von 0 nach x, $0 < x < 1$, kürzer ist als jeder andere Weg von 0 nach x.

(b) Berechnen Sie den Abstand zwischen 0 und x, $0 < x < 1$.

(c) Zeigen Sie, dass es für je zwei Punkte P, Q aus $\mathbb{D}$ einen Automorpismus $T = T_{P,Q}$ auf $\mathbb{D}$ gibt, der P auf 0 und Q auf die reelle Achse schickt.

(d) Berechnen Sie den Abstand zwischen zwei Punkten P und Q aus $\mathbb{D}$.

Aufgabe 2 Zeigen Sie, dass die komplexe Ebene $\mathbb{C}$ bzgl. der sphärischen Metrik

$$ds = |dz|/(1 + |z|^2)$$

nicht vollständig ist.

Aufgabe 3 Beweisen Sie, dass die punktierte Einheitskreisscheibe $\dot{\mathbb{D}} = \{z \in \mathbb{C} : 0 < |z| < 1\}$ bzgl. der hermiteschen Metrik

$$ds = \frac{-1}{2|z| \log |z|} |dz|$$

vollständig ist. Zeigen Sie, dass ds regulär ist.

Aufgabe 4 Bestimmen Sie jeweils die Gaußsche Krümmung der Metrik ds auf dem Gebiet G.

(a) $G = \mathbb{C}$, $ds = \dfrac{|dz|}{1 + |z^2|}$

(b) $G = \mathbb{D}$, $ds = \dfrac{|dz|}{1 - |z^2|}$

(c) $G = \mathbb{H} = \{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Im} z > 0\}$, $ds = \dfrac{|dz|}{2\mathrm{Im} z}$