Bergische Universität Wuppertal WiSe13/14
Fachbereich C - Mathematik und Naturwissenschaften
Prof. Dr. N. V. Shcherbina
Dipl.-Math. T. Pawlaschyk

Übungen zu 'Elemente der Komplexen Analysis' Blatt 1

Aufgabe 1 (a) Berechnen Sie die Länge der reellen Achse als Teilmenge der komplexen Ebene $\mathbb{C}$ bezüglich der sphärischen Metrik $ds = |dz|/(1+|z|^2)$.

(b) Bestimmen Sie jeweils den Umfang des Kreises mit Radius $0 < r < 1$ sowie die Länge der Strecke von 0 nach 1 bezüglich der hyperbolischen Metrik $ds_{\mathbb{D}} = |dz|/(1-|z|^2)$ auf der offenen Einheitskreisscheibe $\mathbb{D}$.

(c) Die obere Halbebene $\mathbb{H}$ sei versehen mit der hyperbolischen Metrik $ds_{\mathbb{H}} = |dz|/(2\mathrm{Im} z)$. Berechnen Sie jeweils die Länge der folgenden Wege bzgl. dieser Metrik.

$$\gamma_1 : [-1,1] \to \mathbb{H}, \quad \gamma_1(t) = t + i$$

$$\gamma_2 : [\pi/4, 3\pi/4] \to \mathbb{H}, \quad \gamma_2(t) = \sqrt{2}\exp(it)$$

Aufgabe 2 Sei $T : \mathbb{D} \to \mathbb{C}$ definiert durch

$$T(z) := a\frac{z-w}{1-\bar{w}z},$$

wobei $a, w \in \mathbb{C}$ mit $|a| = 1$ und $|w| < 1$.

(a) Zeigen Sie, dass T ein Automorphismus auf $\mathbb{D}$ ist.

(b) Zeigen Sie, dass die hyperbolische Metrik $ds_{\mathbb{D}}$ auf $\mathbb{D}$ bezüglich T invariant ist, d.h. $ds_{\mathbb{D}} = ds_{\mathbb{D}} \circ T$.

Aufgabe 3 (a) Sei $S : \mathbb{H} \to \mathbb{C}$ gegeben durch $S(z) := (i-z)/(i+z)$. Zeigen Sie, dass $S : \mathbb{H} \to \mathbb{D}$ eine biholomorphe Abbildung ist.

(b) Zeigen Sie, dass jede biholomorphe Abbildung $R : \mathbb{H} \to \mathbb{D}$ in der Form $R = T \circ S$ darstellbar ist, wobei T ein Automorphismus auf $\mathbb{D}$ und S die Abbildung aus Teil (a) sein soll.

(c) Zeigen Sie: Für jede biholomorphe Abbildung $R : \mathbb{H} \to \mathbb{D}$ gilt

$$ds_{\mathbb{H}} = ds_{\mathbb{D}} \circ R.$$

Hierbei sind $ds_{\mathbb{H}}$ und $ds_{\mathbb{D}}$ die jeweiligen hyperbolischen Metriken auf $\mathbb{H}$ bzw. $\mathbb{D}$.

Abgabe: 07.11.13 in der Übung oder auf D10, Fach 104 `www.kana.uni-wuppertal.de`