





Musterlösungen zu Blatt 14

Kleingruppen zur Service-Veranstaltung Mathematik I für Ingenieure bei Prof. Dr. G. Herbort im WS12/13 – Dipl.-Math. T. Pawlaschyk, 29.01.12

Thema: Wiederholung

Aufgabe 1 Zeigen Sie, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{4}{(k+1)(k+2)(k+3)} = \frac{n(n+5)}{3(n+2)(n+3)}$$

Lösungen zu Aufgabe 1

Wir zeigen die Gleichheit per Induktion über $n \in \mathbb{N}$. Für n = 1 gilt für die linke Seite

$$\sum_{k=1}^{1} \frac{4}{(k+1)(k+2)(k+3)} = \frac{4}{(1+1)(1+2)(1+3)} = \frac{1}{6}.$$

Auf der rechten Seite erhalten wir

$$\frac{1(1+5)}{3(1+2)(1+3)} = \frac{1}{6}$$

Wir schließen von n auf n+1. Dann gilt

$$\sum_{k=1}^{n+1} \frac{4}{(k+1)(k+2)(k+3)} = \sum_{k=1}^{n+1} \frac{4}{(k+1)(k+2)(k+3)} + \frac{4}{((n+1)+1)((n+1)+2)((n+1)+3)}$$

$$\stackrel{\text{I.V.}}{=} \frac{n(n+5)}{3(n+2)(n+3)} + \frac{4}{(n+2)(n+3)(n+4)}$$

$$= \frac{n(n+5)(n+4)}{3(n+2)(n+3)(n+4)} + \frac{12}{3(n+2)(n+3)(n+4)}$$

$$= \frac{n(n+5)(n+4)+12}{3(n+2)(n+3)(n+4)}$$

$$= \frac{(n^2+7n+6)(n+2)}{3(n+2)(n+3)(n+4)}$$

$$= \frac{n^2+7n+6}{3(n+3)(n+4)}$$

$$= \frac{(n+1)(n+6)}{3(n+3)(n+4)}$$

$$= \frac{(n+1)((n+1)+5)}{3((n+1)+2)((n+1)+3)}$$

Aufgabe 2 Bestimmen Sie die Menge aller $x \in \mathbb{R}$, $x \neq 0$, die folgende Ungleichung erfüllen:

$$\left| x - \frac{5}{6} + \frac{7}{3x} \right| < \frac{2}{|x|}$$

Lösungen zu Aufgabe 2 Wir multiplizieren beide Seiten mit |x| und erhalten die Ungleichung

$$\left| x^2 - \frac{5}{6}x + \frac{7}{3} \right| < 2.$$

Wir untersuchen zunächst den Term $x^2-\frac{5}{6}x+\frac{7}{3}$ auf Nullstellen, um die Beträge loszuwerden. Mit Hilfe der pq-Formel stellen wir fest, dass diese Parabel keine Nullstellen besitzt. Sie ist zudem nach oben geöffnet. Also ist $x^2-\frac{5}{6}x+\frac{7}{3}$ für alle $x\in\mathbb{R}$ positiv, und wir können die Beträge in der Ungleichung ignorieren. Wir erhalten

$$x^{2} - \frac{5}{6}x + \frac{7}{3} < 2 \quad \Leftrightarrow \quad x^{2} - \frac{5}{6}x + \frac{1}{3} < 0$$

Die Parabel im linken Term der letzteren Ungleichung wird entweder nie oder zwischen ihren Nullstellen negativ, da sie nach oben geöffnet ist. Wir berechnen wieder die Nullstellen mit Hilfe der pq-Formel und stellen fest, dass auch die Parabel $x^2 - \frac{5}{6}x + \frac{1}{3}$ keine Nullstellen besitzt. Sie wird also nie negativ. Es gibt also kein $x \in \mathbb{R}, \ x \neq 0$, das die Ungleichung $\left|x - \frac{5}{6} + \frac{7}{3x}\right| < \frac{2}{|x|}$ erfüllt. Die Lösungemenge ist somit die leere Menge.

Alternativ kann man die Parabel $x^2 - \frac{5}{6}x + \frac{7}{3}$ in Scheitelpunktform (z.B. mit quadratischer Ergänzung) überführen:

$$x^{2} - \frac{5}{6}x + \frac{7}{3} = \left(x - \frac{5}{12}\right)^{2} + 2\frac{23}{144}$$

Wir sehen, dass für alle $x \in \mathbb{R}$ dieser Term immer echt größer als 2 ist. Die Lösungsmenge der Aufgabe ist somit leer.

Aufgabe 3 (a) Seien
$$P_1 = \begin{pmatrix} -7 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$$
, $P_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $P_3 = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ -7 \end{pmatrix}$ in \mathbb{R}^3 . Geben Sie diejenige

Ebene E in Parameterdarstellung an, die alle drei Punkte P_1 , P_2 und P_3 enthält. Liegt der Punkt $\begin{pmatrix} 7 \\ -7 \\ 4 \end{pmatrix}$ auch in E?

(b) Seien ferner die Punkte
$$Q_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$
 und $Q_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$ gegeben. Berechnen Sie den Abstand

von Q_1 zu E. Geben Sie diejenige Gerade g in Parameterdarstellung an, die durch Q_1 und Q_2 verläuft. Was ist der Schnittpunkt von g und E?

Lösungen zu Aufgabe 3

Zu (a): Die Ebene in Parameterdarstellung sieht wie folgt aus:

$$E = \begin{pmatrix} -7 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} + \mathbb{R} \left[\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -7 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} \right] + \mathbb{R} \left[\begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ -7 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -7 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} -7 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} + \mathbb{R} \begin{pmatrix} 11 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix} + \mathbb{R} \begin{pmatrix} 12 \\ -2 \\ -4 \end{pmatrix}$$

Wir prüfen nun, ob der Punkt $P_4 := \begin{pmatrix} 7 \\ -7 \\ 4 \end{pmatrix}$ in der Ebene liegt. Dazu müssen wir zwei Zahlen $s, t \in \mathbb{R}$ finden, so dass folgende Gleichung gilt:

$$\begin{pmatrix} -7\\2\\-3 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 11\\-1\\4 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 12\\-2\\-4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7\\-7\\4 \end{pmatrix}$$

Dies ist äquivalent zu:

$$s \begin{pmatrix} 11 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 12 \\ -2 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ -7 \\ 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -7 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 \\ -9 \\ 7 \end{pmatrix}$$

In Matrixschreibweise gibt dies:

$$\begin{pmatrix} 11 & 12 & & 14 \\ -1 & -2 & & -9 \\ 4 & -4 & & 7 \end{pmatrix} \xrightarrow{\begin{array}{c|ccc} I+11II \\ 4I-11III \\ \end{array}} \begin{pmatrix} 11 & 12 & & 14 \\ 0 & -10 & & -85 \\ 0 & 92 & & -21 \end{pmatrix} \xrightarrow{\begin{array}{c|ccc} 92II+10III \\ \end{array}} \begin{pmatrix} 11 & 12 & & 14 \\ 0 & -10 & & -85 \\ 0 & 0 & & -8030 \end{pmatrix}$$

Das Gleichungssystem ist nicht lösbar. Demnach liegt der Punkt P_4 nicht in E.

Zu (b): Wir berechnen zunächst

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} 11 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 12 \\ -2 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (-1) \cdot (-4) - 4 \cdot (-2) \\ 4 \cdot 12 - 11 \cdot (-4) \\ 11 \cdot (-2) - (-1) \cdot 12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 \\ 92 \\ -10 \end{pmatrix}$$

und

$$\|\vec{n}\| = \| \begin{pmatrix} 12\\92\\-10 \end{pmatrix} \| = \sqrt{144 + 8464 + 100} = \sqrt{8708} = 2\sqrt{2177}.$$

Laut Vorlesung ist der Abstand von Q_1 zu E gleich:

$$\frac{|\langle \begin{pmatrix} -7\\2\\-3 \end{pmatrix} - \vec{Q_1}, \vec{n} \rangle|}{\|\vec{n}\|} = \frac{|\langle \begin{pmatrix} -7\\2\\-3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1\\0\\-1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 12\\92\\-10 \end{pmatrix} \rangle|}{2\sqrt{2177}} = \frac{|(-8) \cdot 12 + 2 \cdot 92 + (-2) \cdot (-10)|}{2\sqrt{2177}},$$

also gleich $\frac{54}{\sqrt{2177}}$.

Die Gerade g, die durch Q_1 und Q_2 verläuft, hat folgende Gestalt in Parameterform:

$$g = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{bmatrix} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Um den Schnittpunkt der Geraden g mit der Ebene E zu berechnen, müssen wir folgendes Gleichungssystem lösen:

$$\begin{pmatrix} 1\\0\\-1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -3\\1\\-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7\\2\\-3 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 11\\-1\\4 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 12\\-2\\-4 \end{pmatrix}$$

Dies ist äquivalent zu

$$\alpha \begin{pmatrix} 11 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 12 \\ -2 \\ -4 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$$

mit $\alpha = -s$ und $\beta = -t$. Wir bringen nun die erweiterte Matrix zu diesem Gleichungssystem in Zeilenstufenform

$$\begin{pmatrix}
11 & 12 & -3 & & -8 \\
-1 & -2 & 1 & & 2 \\
4 & -4 & -2 & & -2
\end{pmatrix}
\xrightarrow{\begin{array}{c|ccccc}
I + 11II \\
4I - 11III \\
\hline
\end{array}}
\begin{pmatrix}
11 & 12 & -3 & & -8 \\
0 & -10 & 8 & & 14 \\
0 & 92 & 10 & & -10
\end{pmatrix}$$

Somit ist $\lambda = \frac{27}{19}$. Der Schnittpunkt von E und g ist der Punkt

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \frac{27}{19} \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \frac{1}{19} \begin{pmatrix} -62 \\ 27 \\ -73 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 4 Wir betrachten das folgende Gleichungssystem mit $a, b \in \mathbb{R}$.

$$-2x_1 + x_2 - 3x_3 + 4x_4 = 4$$

$$-5x_1 + 2x_2 - 4x_3 + x_4 = -2$$

$$7x_1 - 2x_2 + 25x_4 = a$$

$$-7x_1 + 3x_2 - 7x_3 + 33x_4 = b - 3$$

- (a) Schreiben Sie das Gleichungssystem als erweiterte Koeffizientenmatrix (\mathcal{A}, \vec{b}) und bringen Sie es auf Zeilenstufenform. Was ist der Rang von \mathcal{A} ?
- (b) Für welche a, b ist das Gleichungssystem lösbar? Bestimmen Sie die Lösungsmenge.

Lösungen zu Aufgabe 4

Zu (a): Wir bringen das Gleichungssystem in Zeilenstufenform.

$$\begin{pmatrix}
-2 & 1 & -3 & 4 & | & 4 \\
-5 & 2 & -4 & 1 & | & -2 \\
7 & -2 & 0 & 25 & | & a \\
-7 & 3 & -7 & 33 & | & b-3
\end{pmatrix}
\xrightarrow{5I-2II}$$

$$7I + 2III$$

$$7I - 2IV$$

$$0 & 1 & -7 & 18 & | & 24 \\
0 & 3 & -21 & 78 & | & 28 + 2a \\
0 & 1 & -7 & -38 & | & 34 - 2b$$

Die Matrix \mathcal{A} hat also den Rang 3.

Zu (b): Nach (a) gibt es Lösungen für alle $a, b \in \mathbb{R}$, die 135 - 7a + 3b = 0 erfüllen.

Aufgabe 5 (a) Bestimmen Sie den Grenzwert der Folge

$$a_n = (-1)^n \frac{n^2 + 4n}{n^4 + 4n^2} + \frac{\frac{3}{4}n^3 + n - \frac{7}{35}}{(\frac{4}{5}n + 1)(n^2 + \frac{7}{3})}$$

(b) Bestimmen Sie größtmögliche Intervalle $I,\ J$ in $\mathbb{R},$ sodass die Funktion $f:I\to J$ gegeben durch

$$f(x) = \ln\left(3x^2 + 9x + \frac{463}{68}\right)$$

invertierbar ist.

Lösungen zu Aufgabe 5

Zu (a): Der erste Summand konvergiert gegen Null, da der Nenner schneller als der Zähler gegen Unendlich geht. Für den zweiten Summanden gilt:

$$\frac{\frac{3}{4}n^3 + n - \frac{7}{35}}{(\frac{4}{5}n + 1)(n^2 + \frac{7}{3})} = \frac{\frac{3}{4}n^3 + n - \frac{7}{35}}{\frac{4}{5}n^3 + n^2 + \frac{28}{15}n + \frac{7}{3}} = \frac{\frac{3}{4} + \frac{1}{n^2} - \frac{7}{35n^3}}{\frac{4}{5} + \frac{1}{n} + \frac{28}{15n^2} + \frac{7}{3n^3}}$$

Die Folge a_n konvergiert also gegen $\frac{15}{16}$.

Zu (b): Mit quadratischer Ergänzung bringen wir $h(x) := 3x^2 + 9x + \frac{463}{68}$ in Scheitelpunktform:

$$3x^{2} + 9x + \frac{463}{68} = 3\left(\left(x + \frac{3}{2}\right)^{2} - \frac{9}{4} + \frac{463}{3 \cdot 68}\right) = 3\left(x + \frac{3}{2}\right)^{2} + \frac{1}{17} = y$$

Wir lösen dies nun nach x auf und erhalten

$$x = -\frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{y - \frac{1}{17}}{3}}$$

Wir stellen außerdem fest, dass $h(x) \ge \frac{1}{17}$ ist, also $f(x) = \ln h(x) \ge \ln 1 - \ln 17 = -\ln 17$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Wir setzen nun $I = [-\frac{3}{2}, +\infty), J = [-\ln 17, +\infty)$ und

$$f^{-1}(y) = \exp\left(-\frac{3}{2} + \sqrt{\frac{y - \frac{1}{17}}{3}}\right),$$

denn auf diesem I ist f streng monoton steigend und besitzt daher eine Umkehrfunktion, die auf J definiert ist. Wir rechnen leicht nach, dass $f^{-1}: J \to I$ wohldefiniert ist und $f^{-1} \circ f(x) = x$ für alle $x \in I$ und $f \circ f^{-1}(y) = y$ für alle $y \in J$ erfüllt sind.

Analog kann man f auf Invertierbarkeit auf dem Intervall $I=(-\infty,-\frac{3}{2}]$ untersuchen. Dort ist f streng monoton fallend, also auch invertierbar. Die Umkehrfunktion ist ebenfalls auf $J=[-\ln 17,+\infty)$ definiert und ist gegeben durch

$$f^{-1}(y) = \exp\left(-\frac{3}{2} - \sqrt{\frac{y - \frac{1}{17}}{3}}\right).$$

Aufgabe 6 Sei folgende rationale Funktion gegeben.

$$f(x) = \frac{3x^4 - \frac{11}{7}x^3 - \frac{23}{7}x^2 + \frac{11}{7}x + \frac{2}{7}}{x^2 - \frac{1}{9}}$$

- (a) Bestimmen Sie die Nullstellen sowie die Polstellen von f.
- (b) Berechnen Sie die Ableitung von f. Geben Sie die Tangente t an den Graphen von f im Punkt (1, f(1)) an.
- (c) Wie verhält sich f asymptotisch?

Lösungen zu Aufgabe 6

Allgemeiner Hinweis: Es empfiehlt sich vor dem Rechnen, $\frac{1}{7}$ aus dem Zähler und $\frac{1}{9}$ aus dem Nenner heraus zu faktorisieren. Dann ist

$$f(x) = \frac{9}{7} \cdot \frac{21x^4 - 11x^3 - 23x^2 + 11x + 2}{9x^2 - 1}$$

einfacher zu behandeln.

Zu (a): Wir untersuchen den Zähler p(x) auf Nullstellen. Das Polynom im Zähler ist vom Grad 4. Eine Nullstelle sehen wir leicht, nämlich $x_1 = 1$. Wir wenden das Hornerschema oder Polynomdivision an und faktorisieren den linearen Term (x - 1) aus p heraus (siehe Blatt 12). Es gilt dann

$$p(x) = (x-1)r_1(x) = (x-1)\underbrace{\left(3x^3 + \frac{10}{7}x^2 - \frac{13}{7}x - \frac{2}{7}\right)}_{=r_1(x)}.$$

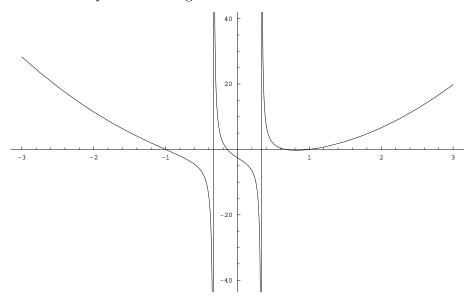
Die Nullstellen vom Polynom r_1 können wir mit Hilfe von bekannten Formeln aus der Vorlesung für Polynome vom Grad 3 berechnen (siehe Blatt 2). Eine einfache Nullstelle ergibt sich aber einfacher erneut durch Erraten, nämlich $x_2 = -1$. Wieder Faktorisieren wir diese Nullstelle mit Hilfe des Hornerschemas oder Polynomdivision heraus und erhalten

$$p(x) = (x-1)(x+1)r_2(x) = (x-1)(x+1)\underbrace{\left(3x^2 - \frac{11}{7}x - \frac{2}{7}\right)}_{=r_2(x)}.$$

Mit Hilfe der pq-Formel errechnen wir die Nullstellen des quadratischen Polynoms r_2 . Diese sind $x_3 = \frac{2}{3}$ und $x_4 = \frac{1}{7}$.

Für den Nenner von f haben wir die Nullstellen $x_{5,6} = \pm \frac{1}{3}$ (zweite Binomische Formel). Sie sind die Polstellen von f.

Der Graph der Funktion f sieht wie folgt aus:



Zu (b): Mit Hilfe der Quotientenregel erhalten wir für die Ableitung von f:

$$f'(x) = \frac{378x^5 - 99x^4 - 84x^3 - 66x^2 + 10x - 11}{63\left(x^2 - \frac{1}{9}\right)^2}$$

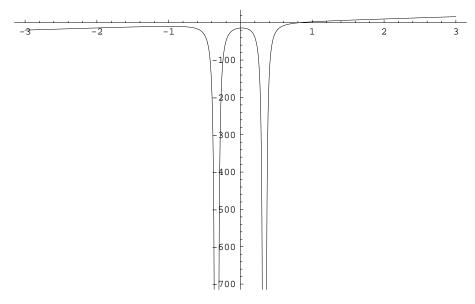
Dann ist $f'(1) = \frac{18}{7}$ die Steigung der Tangente an den Graphen von f in (1, f(1)). Die gesuchte Tangente t hat die Gestalt

$$t(x) = \frac{18}{7}x + b$$

Da sie den Graphen von f in (1, f(1)) = (1, 0) berührt, muss t(1) = 0 sein, d.h. $b = -\frac{18}{7}$. Es gilt also

$$t(x) = \frac{18}{7}x - \frac{18}{7}$$

Der Graph der Ableitung der Funktion f sieht wie folgt aus:



Zu (c): Mit Hilfe der Polynomdivision erhalten wir

$$\frac{9}{7}(21x^4 - 11x^3 - 23x^2 + 11x + 2) : (9x^2 - 1) = 3x^2 - \frac{11}{7}x - \frac{62}{21} + \frac{\frac{88}{7}x - \frac{8}{21}}{9x^2 - 1}$$

Asymptotisch verhält sich f für große |x| wie das Polynom $3x^2 - \frac{11}{7}x - \frac{62}{21}$. Hier zum Vergleich der Graph der Asymptote:

