BERGISCHE UNIVERSITÄT WUPPERTAL
die studien eingangs phase
GEFÖRDERT VOM Bundesministerium für Bildung und Forschung

Übungsaufgaben, Blatt 14

Kleingruppen zur Service-Veranstaltung Mathematik I für Ingenieure bei Prof. Dr. G. Herbort im WS12/13 – Dipl.-Math. T. Pawlaschyk, 29.01.12

Thema: Wiederholung

Aufgabe 1 Zeigen Sie, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{4}{(k+1)(k+2)(k+3)} = \frac{(n+1)(n+4)}{(n+2)(n+3)}$$

Aufgabe 2 Bestimmen Sie die Menge aller $x \in \mathbb{R}$, die folgende Ungleichung erfüllen:

$$\left| x - \frac{5}{6} + \frac{7}{3x} \right| < \frac{2}{|x|}$$

Aufgabe 3 (a) Seien $P_1 = \begin{pmatrix} -7 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$, $P_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $P_3 = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ -7 \end{pmatrix}$ in $\mathbb{R}^3$. Geben Sie diejenige Ebene E in Parameterdarstellung an, die alle drei Punkte P_1, P_2 und P_3 enthält. Liegt der Punkt $\begin{pmatrix} 7 \\ -7 \\ 4 \end{pmatrix}$ auch in E?

(b) Seien ferner die Punkte $Q_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ und $Q_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$ gegeben. Berechnen Sie den Abstand von Q_1 zu E. Geben Sie diejenige Gerade g in Parameterdarstellung an, die durch Q_1 und Q_2 verläuft. Was ist der Schnittpunkt von g und E?

Aufgabe 4 Wir betrachten das folgende Gleichungssystem mit $a, b \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} -2x_1 + x_2 - 3x_3 + 4x_4 &= 4 \\ -5x_1 + 2x_2 - 4x_3 + x_4 &= -2 \\ 7x_1 - 2x_2 + 25x_4 &= a \\ -7x_1 + 3x_2 - 7x_3 + 33x_4 &= b - 3 \end{aligned}$$

(a) Schreiben Sie das Gleichungssystem als erweiterte Koeffizientenmatrix $(\mathscr{A}, \vec{b})$ und bringen Sie es auf Zeilenstufenform. Was ist der Rang von $\mathscr{A}$?

(b) Für welche a, b ist das Gleichungssystem lösbar? Bestimmen Sie die Lösungsmenge.

Aufgabe 5 (a) Bestimmen Sie den Grenzwert der Folge

$$a_n = (-1)^n \frac{n^2 + 4n}{n^4 + 4n^2} + \frac{\frac{3}{4}n^3 + n - \frac{7}{35}}{(\frac{4}{5}n + 1)(n^2 + \frac{7}{3})}$$

(b) Bestimmen Sie größtmögliche Intervalle I, J in $\mathbb{R}$, sodass die Funktion $f : I \to J$ gegeben durch

$$f(x) = \ln\left(3x^2 + 9x + \frac{463}{68}\right)$$

invertierbar ist.

Aufgabe 6 Sei folgende rationale Funktion gegeben.

$$f(x) = \frac{3x^4 - \frac{11}{7}x^3 - \frac{23}{7}x^2 + \frac{11}{7}x + \frac{2}{7}}{x^2 - \frac{1}{9}}$$

(a) Bestimmen Sie die Nullstellen sowie die Polstellen von f.

(b) Berechnen Sie die Ableitung von f. Geben Sie die Tangente t an den Graphen von f im Punkt $(1, f(1))$ an.

(c) Wie verhält sich f asymptotisch?