Musterlösungen zu Blatt 13

Kleingruppen zur Service-Veranstaltung Mathematik I für Ingenieure bei Prof. Dr. G. Herbort im WS12/13 – Dipl.-Math. T. Pawlaschyk, 22.01.12

Thema: Potenz-, Logarithmen- und Hyperbelfunktionen, Differentiation

Aufgabe 1

Lösen Sie folgende Gleichungen.

$$\text{(i) } 9^x \cdot 3^{x^2+1} = (27^x)^x \qquad \text{(ii) } 25^x + 2\cdot 5^x = 24 \qquad \text{(iii) } \cos(2x) = \cos(x)$$

$$\text{(iv) } 3^{3x-1} - 5^{x-2} = 3^{3x-3} - 5^{x-3} \qquad \text{(v) } \ln x - \ln 4 = \ln 35 - \ln(x+4)$$

Lösungen zu Aufgabe 1

Zu (i): Es ist

$$\begin{aligned} 9^x \cdot 3^{x^2+1} = (27^x)^x \quad &\Leftrightarrow \quad 3^{2x} \cdot 3^{x^2+1} = 27^{x^2} \\ &\Leftrightarrow \quad 3^{2x+x^2+1} = 3^{3x^2} \\ &\Leftrightarrow \quad 3^{2x+x^2+1-3x^2} = 1 \\ &\Leftrightarrow \quad 3^{2x-2x^2+1} = 3^0 \end{aligned}$$

Wir wenden auf beiden Seiten den Logarithmus zur Basis 3 an, also $\log_3$, und erhalten die Gleichung

$$-2x^2 + 2x + 1 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 - x - \frac{1}{2} = 0$$

Mit der pq-Formel erhalten wir die Lösungen $x_{1,2} = \frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Zu (ii): Es gilt $25^x = (5^2)^x = 5^{2x}$ und somit:

$$25^x + 2\cdot 5^x = 24 \quad \Leftrightarrow \quad (5^x)^2 + 2\cdot 5^x = 24$$

Wir substituieren $t = 5^x$ und erhalten die Gleichung $t^2 + 2t - 24 = 0$. Die Lösungen sind

$$t_{1,2} = -1 \pm \sqrt{1+24} = -1 \pm 5.$$

Da $t = 5^x > 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$, kommt nur die Lösung $t = 4$ in Frage. Also

$$\begin{aligned} 4 = 5^x = t \quad &\Leftrightarrow \quad \ln 4 = x \ln 5 \\ &\Leftrightarrow \quad \frac{\ln 4}{\ln 5} = \log_5 4 = x \log_5(5) = x \cdot 1 = x \approx 0.861353 \end{aligned}$$

Zu (iii): Es gilt $\cos(2x) = 2\cos^2 x - 1$, also ist die Gleichung mit

$$2\cos^2 x - 1 = \cos x$$

äquivalent. Schreiben wir $y = \cos x$, so folgt

$$y^2 - \frac{1}{2}y = \frac{1}{2}$$

Diese quadratische Gleichung in y hat die Lösungen $y = 1$ und $y = -1/2$. Es sind also nur noch die Gleichungen $\cos x = 1$ und $\cos x = -1/2$ zu lösen. Die Lösungen der ersten Gleichung haben alle die Form $x = 2k\pi$ mit $k \in \mathbb{Z}$. Die zweite Gleichung wird genau durch die x der Form $\frac{2}{3}\pi + 2k\pi$ oder $\frac{4}{3}\pi + 2k\pi$ mit $k \in \mathbb{Z}$.

Zu (iv): Es ist:

$$\begin{aligned}
3^{3x-1} - 5^{x-2} = 3^{3x-3} - 5^{x-3} \quad &\Leftrightarrow \quad 3^{3x-1} - 3^{3x-3} = 5^{x-2} - 5^{x-3} \\
&\Leftrightarrow \quad 3^{3x}\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{27}\right) = 5^x\left(\frac{1}{25} - \frac{1}{125}\right) \\
&\Leftrightarrow \quad 3^{3x}\left(\frac{8}{27}\right) = 5^x\left(\frac{4}{125}\right) \\
&\Leftrightarrow \quad \left(\frac{27}{5}\right)^x = \left(\frac{4}{125}\right) \cdot \left(\frac{27}{8}\right) = \frac{27}{250} \\
&\Leftrightarrow \quad x = \frac{\ln\left(\frac{27}{250}\right)}{\ln\left(\frac{27}{5}\right)} \approx -1.31975
\end{aligned}$$

Zu (v): Nach Anwendung der Exponentialfunktion auf beiden Seiten der Gleichung erhalten wir:

$$\frac{x}{4} = \frac{35}{x+4} \Leftrightarrow x(x+4) = 140$$

Diese Gleichung wird durch $x = 10$ und $x = -14$ gelöst. Aber höchstens $x = 10$ kann Lösung der logarithmischen Gleichung sein, da für $x = -14$ der Ausdruck $\ln(x+4)$ nicht definiert ist. Die Probe bei $x = 10$ ergibt, dass beide Seiten der gegebenen Gleichung gleich $\ln(5/2) \approx 0.916291$ sind.

Aufgabe 2

Zeigen Sie für alle $n \in \mathbb{N}$:

$$\text{(a) } 4 \cdot 4^2 \cdot \ldots \cdot 4^n = 2^{n(n+1)}$$

$$\text{(b) } \sum_{k=1}^{n-1} k \ln\left(\frac{k+1}{k}\right) = n\ln(n) - \ln(n!)$$

Lösungen zu Aufgabe 2

Beide Aufgabenteile kann man durch geschickte Umformungen beider Seiten zeigen oder per Induktion über n. Wir geben beide Lösungsmöglichkeiten.

Zu (a): Wir erinnern uns an die Gaußsche Summenformel, d.h. $1 + 2 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}$. Es gilt

$$\begin{aligned}
4 \cdot 4^2 \cdot \ldots \cdot 4^n &= 4^{1+2+\ldots+n} \\
&= 2^{2(1+2+\ldots+n)} \\
&= 2^{n(n+1)}
\end{aligned}$$

Alternativ kann man die Gleichung per Induktion über n zeigen. Für $n = 1$ ist die Gleichung offensichtlich richtig. Wir schließen von n nach $n + 1$:

$$\begin{aligned}
4 \cdot 4^2 \cdot \ldots \cdot 4^{n+1} &= 4 \cdot 4^2 \cdot \ldots \cdot 4^n \cdot 4^{n+1} \\
&\overset{\text{I.V.}}{=} 2^{n(n+1)} \cdot 4^{n+1} \\
&= 2^{n(n+1)} \cdot 2^{2(n+1)} \\
&= 2^{n(n+1)+2(n+1)} \\
&= 2^{(n+1)(n+2)} \\
&= 2^{(n+1)((n+1)+1)}
\end{aligned}$$

Zu (b): Die zu untersuchende Formel beinhaltet eine sog. Teleskopsumme (T.S.):

$$\sum_{k=1}^{n} a_k - a_{k-1} = (a_1 - a_0) + (a_2 - a_1) + \ldots + (a_{n-1} - a_{n-2}) + (a_n - a_{n-1}) = a_n - a_0$$

Wir formen nun die gegebene Summe geschickt um, um eine Teleskopsumme zu erhalten.

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n-1} k \ln\left(\frac{k+1}{k}\right) &= \sum_{k=1}^{n-1} k(\ln(k+1) - \ln(k)) \\
&= \sum_{k=1}^{n-1} k\ln(k+1) - k\ln(k) \\
&= \sum_{k=1}^{n-1} (k+1)\ln(k+1) - \ln(k+1) - k\ln(k) \\
&= \sum_{k=1}^{n-1} (k+1)\ln(k+1) - k\ln(k) - \sum_{k=1}^{n-1} \ln(k+1) \\
&\overset{\text{T.S.}}{=} ((n-1)+1)\ln((n-1)+1) - 1 \cdot \underbrace{\ln(1)}_{=0} - \ln(\underbrace{1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot (n-1+1)}_{=n!}) \\
&= n\ln(n) - \ln(n!)
\end{aligned}$$

Alternativ per Induktion. Für $n = 1$ gilt trivialerweise:

$$\sum_{k=1}^{1-1} k \ln\left(\frac{k+1}{k}\right) = 0 = 1 \cdot 0 - 0 = 1 \cdot \ln(1) - \ln(1!)$$

Für $n = 2$ gilt:

$$\sum_{k=1}^{2-1} k \ln\left(\frac{k+1}{k}\right) = 1 \cdot \ln 2 = \ln 2 = (2-1)\ln 2 = 2 \cdot \ln(2) - \ln(2!)$$

Wir schließen von n auf $n+1$.

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{(n+1)-1} k\ln\left(\frac{k+1}{k}\right) &= \sum_{k=1}^{n} k\ln\left(\frac{k+1}{k}\right) \\
&= \sum_{k=1}^{n-1} k\ln\left(\frac{k+1}{k}\right) + n\ln\left(\frac{n+1}{n}\right) \\
&\overset{\text{I.V.}}{=} n\ln(n) - \ln(n!) + n\ln(n+1) - n\ln(n) \\
&= n\ln(n+1) - \ln(n!) \\
&= n\ln(n+1) - \ln\left(\frac{n!(n+1)}{n+1}\right) \\
&= n\ln(n+1) - [\ln(n!(n+1)) - \ln(n+1)] \\
&= n\ln(n+1) + \ln(n+1) - \ln((n+1)!) \\
&= (n+1)\ln(n+1) - \ln((n+1)!)
\end{aligned}$$

Aufgabe 3

Mit der Exponentialfunktion e^x bildet man die sog. *Hyperbelfunktionen*

$$\sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \quad \cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2},$$

sowie $\operatorname{tgh}(x) = \dfrac{\sinh(x)}{\cosh(x)}$.

Zeigen Sie:

(a) $\cosh^2(x) - \sinh^2(x) = 1$, und tgh hat Werte in $(-1, 1)$.

(b) $\sinh : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ wächst monoton und hat eine Umkehrfunktion.

(c) Die Umkehrfunktion zu sinh wird mit Arsinh bezeichnet. Zeigen Sie:

$$\operatorname{Arsinh}(t) = \ln(t + \sqrt{1+t^2})$$

(d) Auch tgh hat eine Umkehrfunktion (Artgh). Diese ist auf $(-1, 1)$ erklärt. Zeigen Sie:

$$\operatorname{Artgh}(x) = \frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x}$$

Lösungen zu Aufgabe 3

Zu (a): Es ist:

$$\begin{aligned}
\cosh^2(x) - \sinh^2(x) &= \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)^2 - \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)^2 \\
&= \frac{1}{4}\left[e^{2x} + 2e^{x-x} + e^{-2x} - \left(e^{2x} - 2e^{x-x} + e^{-2x}\right)\right] \\
&= \frac{1}{4} \cdot 4e^0 = 1
\end{aligned}$$

Da $\cosh(x)$ nicht negativ ist für alle $x \in \mathbb{R}$ und wir die Ungleichungen

$$\cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \geq \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \sinh(x)$$

und

$$-\cosh(x) = -\frac{e^x + e^{-x}}{2} = \frac{-e^x + -e^{-x}}{2} \leq \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \sinh(x)$$

haben, ist $|\sinh(x)| \leq \cosh(x) = |\cosh(x)|$ und somit $|\text{tgh}| \leq 1$.

Zu (b): Es ist $e^t > e^s$, wenn $t > s$, und in diesem Fall auch $e^{-t} < e^{-s}$, also $-e^{-t} > -e^{-s}$. Damit folgt $\sinh(t) > \sinh(s)$, was bedeutet, dass sinh streng monoton wächst. Ist nun $t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ beliebig, so lösen wir die Gleichung $\frac{1}{2}(s - \frac{1}{s}) = t$. Das ist immer möglich, denn

$$\frac{1}{2}(s - \frac{1}{s}) = t \;\Leftrightarrow\; s^2 - 1 = 2st \;\Leftrightarrow\; (s-t)^2 = 1 + t^2$$

Man wähle etwa $s = t + \sqrt{1+t^2}$. Wenn $t = 0$, wählen wir $s = 1$. Für alle $t \in \mathbb{R}$ ist aber $t + \sqrt{1+t^2} > 0$, so dass wir $\sigma := \ln s = \ln(t + \sqrt{1+t^2})$ bilden können. Es gilt dann

$$\sinh(\sigma) = \frac{1}{2}(e^\sigma - \frac{1}{e^\sigma}) = t$$

Somit ist $\sinh : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine umkehrbare Funktion. Es gilt $\sinh(\ln(t + \sqrt{1+t^2})\,) = t$. Damit ist die Umkehrfunktion von sinh auf $\mathbb{R}$ gegeben durch

$$\text{Arsinh}(t) = \ln(t + \sqrt{1+t^2}).$$

Zu (c): Sei $t = \text{tgh(x)}$. Wir lösen nun nach x auf.

$$\begin{aligned}
t = \text{tgh(x)} \quad &\Leftrightarrow \quad t = \frac{\sinh(x)}{\cosh(x)} \\
&\Leftrightarrow \quad t = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} \\
&\Leftrightarrow \quad t = \frac{e^x(1 - e^{-x})}{e^x(1 + e^{-x})} \\
&\Leftrightarrow \quad t = \frac{1 - e^{-2x}}{1 + e^{-2x}} \\
&\Leftrightarrow \quad t(1 + e^{-2x}) = 1 - e^{-2x} \\
&\Leftrightarrow \quad t + te^{-2x} = 1 - e^{-2x} \\
&\Leftrightarrow \quad t - 1 = -e^{-2x} - te^{-2x} \\
&\Leftrightarrow \quad t - 1 = -(1+t)e^{-2x} \\
&\Leftrightarrow \quad 1 - t = (1+t)e^{-2x} \\
&\Leftrightarrow \quad \frac{1-t}{1+t} = e^{-2x} \\
&\Leftrightarrow \quad \ln\frac{1-t}{1+t} = -2x \\
&\Leftrightarrow \quad -\frac{1}{2}\ln\frac{1-t}{1+t} = x \\
&\Leftrightarrow \quad \frac{1}{2}\ln\frac{1+t}{1-t} = x
\end{aligned}$$

Aufgabe 4

Berechnen Sie jeweils die Ableitung folgender Funktionen mit Hilfe der Produkt- und Quotientenregel.

$$\text{(i) } \exp(nx), \quad n \in \mathbb{Z} \qquad \text{(ii) } \text{tgh}^2(x) \qquad \text{(iii) } \frac{x^3 - x}{x^2 + 12}$$

$$\text{(iv)}\ \frac{1}{1+\cos^2(x)} \qquad \text{(v)}\ \cos(4x) \qquad \text{(iv)}\ \frac{2x^4-5x^2-3}{3x^2+7x}\exp(-3x)$$

Lösungen zu Aufgabe 4

Zu (i): Wir behaupten, dass $(\exp(nx))' = n\exp(nx)$ gilt für alle $n \in \mathbb{Z}$. Wir zeigen diese Gleichheit zunächst für alle $n \in \mathbb{N}_0$. Für $n = 0$ ist $\exp(nx)$ konstant gleich 1. Damit ist die Ableitung konstant gleich $0 = 0\cdot\exp(0\cdot x)$. Wir schließen von n nach $n+1$. Es gilt dann mit der Produktregel (P.R.):

$$\begin{aligned}
(\exp((n+1)x))' &= (\exp(nx)\exp(x))' \\
&\overset{\text{P.R.}}{=} \exp(x)\cdot(\exp(nx))' + \exp(nx)\cdot(\exp(x))' \\
&\overset{\text{I.V.}}{=} \exp(x)\cdot n\exp(nx) + \exp(nx)\cdot\exp(x) \\
&= (n\exp(nx) + \exp(nx))\exp(x) \\
&= (n+1)\exp(nx)\exp(x) \\
&= (n+1)\exp((n+1)x)
\end{aligned}$$

Damit ist $(\exp(nx))' = n\exp(nx)$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$ gezeigt. Sei nun n eine negative ganze Zahl. Dann ist $k = -n$ eine natürliche Zahl und wir erhalten mit der Quotientenregel:

$$\begin{aligned}
(\exp(nx))' &= \left(\exp(-nx)^{-1}\right)' \\
&= \left(\frac{1}{\exp(kx)}\right)' \\
&\overset{\text{Q.R.}}{=} \frac{0 - 1\cdot(\exp(kx))'}{\exp(kx)^2} \\
&\overset{\text{I.V.}}{=} \frac{-k\exp(kx)}{\exp(kx)^2} \\
&= \frac{-k}{\exp(kx)} \\
&= \frac{-k}{\exp(-kx)^{-1}} \\
&\overset{k=-n}{=} n\exp(nx)
\end{aligned}$$

Zu (ii): Da nach Teil (i) die Ableitung von e^{-x} gleich $-e^{x}$ ist, ist leicht zu sehen, dass $\sinh' = \cosh$ und $\cosh' = \sinh$ gilt. Mit der Produktregel folgt dann leicht:

$$(\sinh^2(x))' = (\sinh(x)\sinh(x))' = 2\sinh(x)\cosh(x) = (\cosh(x)\cosh(x)) = \cosh^2(x)$$

Mit der Quotientenregel (Q.R.) folgt nun:

$$\begin{aligned}
\left(\operatorname{tgh}^2(x)\right)' &= \left(\frac{\sinh^2(x)}{\cosh^2(x)}\right)' \\
&\overset{\text{Q.R.}}{=} \frac{\left(\sinh^2(x)\right)'\cosh^2(x) - \left(\cosh^2(x)\right)'\sinh^2(x)}{\cosh^4(x)} \\
&\overset{\text{s.o.}}{=} \frac{2\sinh(x)\cosh(x)\cosh^2(x) - 2\sinh(x)\cosh(x)\sinh^2(x)}{\cosh^4(x)} \\
&= \frac{2\sinh(x)\cosh^3(x) - 2\cosh(x)\sinh^3(x)}{\cosh^4(x)} \\
&= \frac{2\sinh(x)\cosh(x)\overbrace{(\cosh^2(x) - \sinh^2(x))}^{=1}}{\cosh^4(x)} \\
&= \frac{2\sinh(x)\cosh(x)}{\cosh^4(x)} \\
&= \frac{\cosh(2x)}{2\cosh^4(x)}
\end{aligned}$$

Zu (iii):
Wir benutzen die Quotientenregel:

$$\left(\frac{x^3-x}{x^2+12}\right)' = \frac{(3x^2-1)\cdot(x^2+12)-(x^3-x)\cdot 2x}{(x^2+12)^2} = \frac{x^4+37x^2-12}{(x^2+12)^2}$$

Zu Teil (iv):
Das Additionstheorem $\sin(x+y) = \sin(x)\cos(y)+\sin(y)\cos(x)$ liefert, dass $\sin(2x) = 2\sin(x)\cos(x)$ gilt. Wir benutzen die Produktregel sowie die Quotientenregel:

$$\left(\frac{1}{1+\cos^2(x)}\right)' = \frac{0-(1-2\sin(x)\cos(x))}{(1+\cos^2(x))^2} = \frac{2\sin(x)\cos(x)-1}{(1+\cos^2(x))^2} = \frac{\sin(2x)}{(1+\cos^2(x))^2}$$

Zu Teil (v):
Wir wissen, dass die Ableitung von cos genau $-\sin$ ist. Wir betrachten nun die Ableitung von $\cos^2$. Es gilt mit der Produktregel:

$$(\cos^2(x))' = (\cos(x)\cos(x))' = -2\sin(x)\cos(x)$$

Ferner gilt wieder mit der Produktregel:

$$(\cos^4(x))' = (\cos^2(x)\cos^2(x))' = 2\cos^2(x)(\cos^2(x))' = -4\sin(x)\cos^3(x)$$

Mit der zweifachen Anwendung der Gleichung $\cos(2x) = 2\cos^2(x) - 1$ gilt dann:

$$\begin{aligned}
\cos(4x) &= 2\cos^2(2x) - 1 \\
&= 2\left(2\cos^2(x) - 1\right)^2 - 1 \\
&= 2\left(4\cos^4(x) - 4\cos^2(x) + 1\right) - 1 \\
&= 8\cos^4(x) - 8\cos^2(x) + 1
\end{aligned}$$

Nun können wir die Ableitung von $\cos(4x)$ bestimmen.

$$\begin{aligned}
(\cos(4x))' &= \left(8\cos^4(x) - 8\cos^2(x) + 1\right)' \\
&= -32\sin(x)\cos^3(x) + 16\sin(x)\cos(x) \\
&= -16\sin(x)\cos(x)(2\cos^2(x) - 1) \\
&= -16\sin(x)\cos(x)\cos(2x) \\
&= -8(2\sin(x)\cos(x))\cos(2x) \\
&= -8\sin(2x)\cos(2x) \\
&= -4\sin(4x)
\end{aligned}$$

Zu Teil (vi):
Mit der Quotientenregel folgt:

$$\begin{aligned}
\left(\frac{2x^4 - 5x^2 - 3}{3x^2 + 7x}\exp(-3x)\right)' &= \left[(-3)\left(\frac{2x^4 - 5x^2 - 3}{3x^2 + 7x}\right)\right. \\
&+ \left.\frac{(8x^3 - 10x)(3x^2 + 7x) - (2x^4 - 5x^2 - 3)(6x + 7)}{(3x^2 + 7x)^2}\right]\exp(-3x) \\
&= \frac{-18x^6 - 78x^5 - 25x^4 + 165x^3 + 132x^2 + 81x + 21}{(3x^2 + 7x)^2}\exp(-3x)
\end{aligned}$$