BERGISCHE UNIVERSITÄT WUPPERTAL
die studien eingangs phase
GEFÖRDERT VOM Bundesministerium für Bildung und Forschung

Übungsaufgaben, Blatt 13

Kleingruppen zur Service-Veranstaltung Mathematik I für Ingenieure bei Prof. Dr. G. Herbort im WS12/13 – Dipl.-Math. T. Pawlaschyk, 22.01.12

Thema: Potenz-, Logarithmen- und Hyperbelfunktionen, Differentiation

Aufgabe 1

Lösen Sie folgende Gleichungen.

$$\text{(i) } 9^x \cdot 3^{x^2+1} = (27^x)^x \qquad \text{(ii) } 25^x + 2 \cdot 5^x = 24 \qquad \text{(iii) } \cos(2x) = \cos(x)$$

$$\text{(iv) } 3^{3x-1} - 5^{x-2} = 3^{3x-3} - 5^{x-3} \qquad \text{(v) } \ln x - \ln 4 = \ln 35 - \ln(x+4)$$

Aufgabe 2

Zeigen Sie für alle $n \in \mathbb{N}$:

$$\text{(a) } 4 \cdot 4^2 \cdot \ldots \cdot 4^n = 2^{n(n+1)}$$

$$\text{(b) } \sum_{k=1}^{n-1} k \ln\left(\frac{k+1}{k}\right) = n\ln(n) - \ln(n!)$$

Aufgabe 3

Mit der Exponentialfunktion e^x bildet man die sog. *Hyperbelfunktionen*

$$\sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \quad \cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2},$$

sowie $\operatorname{tgh}(x) = \dfrac{\sinh(x)}{\cosh(x)}$.

Zeigen Sie:

(a) $\cosh^2(x) - \sinh^2(x) = 1$, und tgh hat Werte in $(-1, 1)$.

(b) $\sinh : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ wächst monoton und hat eine Umkehrfunktion.

(c) Die Umkehrfunktion zu sinh wird mit Arsinh bezeichnet. Zeigen Sie:

$$\operatorname{Arsinh}(t) = \ln(t + \sqrt{1+t^2})$$

(d) Auch tgh hat eine Umkehrfunktion (Artgh). Diese ist auf $(-1, 1)$ erklärt. Zeigen Sie:

$$\operatorname{Artgh}(x) = \frac{1}{2} \ln \frac{1+x}{1-x}$$

Aufgabe 4

Berechnen Sie jeweils die Ableitung folgender Funktionen mit Hilfe der Produkt- und Quotientenregel.

$$\text{(i)}\ \exp(nx), \quad n \in \mathbb{Z} \qquad \text{(ii)}\ \operatorname{tgh}^2(x) \qquad \text{(iii)}\ \frac{x^3 - x}{x^2 + 12}$$

$$\text{(iv)}\ \frac{1}{1 + \cos^2(x)} \qquad \text{(v)}\ \cos(4x) \qquad \text{(iv)}\ \frac{2x^4 - 5x^2 - 3}{3x^2 + 7x} \exp(-3x)$$