Musterlösungen zu Blatt 12

Kleingruppen zur Service-Veranstaltung Mathematik I für Ingenieure bei Prof. Dr. G. Herbort im WS12/13 – Dipl.-Math. T. Pawlaschyk, 15.01.12

Thema: Rationale und trigonometrische Funktionen

Aufgabe 1

(a) Sei $f(x) = x^4 + x^3 - 20x^2 + 72$. Zeigen Sie, dass $x_0 = 3$ und $x_1 = -2$ Nullstellen von f sind. Finden Sie ein Polynom g vom Grad 2, so dass $f(x) = (x-3)(x+2)g(x)$ gilt. Was sind die Nullstellen von g?

(b) Sei $f(x) = x^6 - 4x^5 - 6x^4 - 68x^3 - 223x^2 - 240x - 84$. Zeigen Sie, dass $x_0 = -1$ und $x_1 = 7$ Nullstellen von f sind und bestimmen Sie jeweils ihre Vielfachheit.

(c) Sei $f(x) = x^3 + 14x^2 + 37x + 59$. Zeigen Sie, dass $x = -2$ eine Nullstelle von f ist. Bestimmen Sie Koeffizienten $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, so dass f die folgende Form hat:

$$f(x) = a(x+2)^3 + b(x+2)^2 + c(x+2) + d$$

Hinweis: Benutzen Sie das Horner-Schema.

Lösungen zu Aufgabe 1

Zu (a): Dass $x_0 = 3$ und $x_1 = -2$ Nullstellen von f sind, prüft man leicht durch Einsetzen. Mit Hilfe des Horner-Schemas erhalten wir:

	1	1	-20	0	72
$\cdot 3$		3	12	-24	-72
$+$	1	4	-8	-24	0
$\cdot(-2)$		-2	-4	24	
$+$	1	2	-12	0	

D.h. $f(x) = (x-3)(x+2)(x^2 + 2x - 12)$. Mit der pq-Formel erhalten wir folgende Nullstellen für $g(x) = x^2 + 2x - 12$.

$$x_{2,3} = -1 \pm \sqrt{13}.$$

Zu (b):
Wir setzen $x_0 = -1$ und $x_1 = 7$ in f ein und sehen leicht, dass es sich um Nullstellen handelt. Wir verwenden das Hornerschema:

	1	-4	-6	-68	-223	-240	-84
$\cdot(-1)$		-1	5	1	67	156	84
$+$	1	-5	-1	-67	-156	-84	0
$\cdot 7$		7	14	91	168	84	
$+$	1	2	13	24	12	0	

Wir führen das Schema fort und prüfen, ob 7 eine Nullstelle von höherer Vielfachheit als 1 ist.

	1	2	13	24	12
$\cdot 7$		7	63	432	3192
$+$	1	9	76	456	3204

Somit hat f in 7 nur eine Nullstelle von Vielfachheit 1. Wir greifen das vorletzte Schema auf und untersuchen die Nullstelle -1.

	1	2	13	24	12
$\cdot(-1)$		-1	-1	-12	-12
$+$	1	1	12	12	0
$\cdot(-1)$		-1	0	-12	
$+$	1	0	12	0	
$\cdot(-1)$		-1	1		
$+$	1	-1	13		

Die Vielfachheit der Nullstelle -1 ist also 3. f hat dann die Gestalt $f(x) = (x+1)^3(x-7)(x^2+12)$.

Zu (c):

Wir verwenden das Horner-Schema für die Stelle $x_0 = -2$:

	1	14	37	59
$\cdot(-2)$		-2	-24	-26
$+$	1	12	13	**33**
$\cdot(-2)$		-2	-20	
$+$	1	10	$\mathbf{-7}$	
$\cdot(-2)$		-2		
$+$	1	**8**		

Somit ist $f(x) = (x+2)^3 + 8(x+2)^2 - 7(x+2) + 33$.

Aufgabe 2 Untersuchen Sie das asymptotische Verhalten folgender rationaler Funktionen für $|x| \to \infty$.

(a) $f(x) = \dfrac{x^5 - 7x^2 + 13x - 2}{x^2 + 7}$ (b) $g(x) = \dfrac{2x^5 - x^3 + 7x - 2}{x^2 - 2x}$

Skizzieren Sie den Graphen von g.

Hinweis: Benutzen Sie Polynomdivision.

Lösungen zu Aufgabe 2

Zu (a):
Mit Polynomdivision erhalten wir folgenden Ausdruck für f:

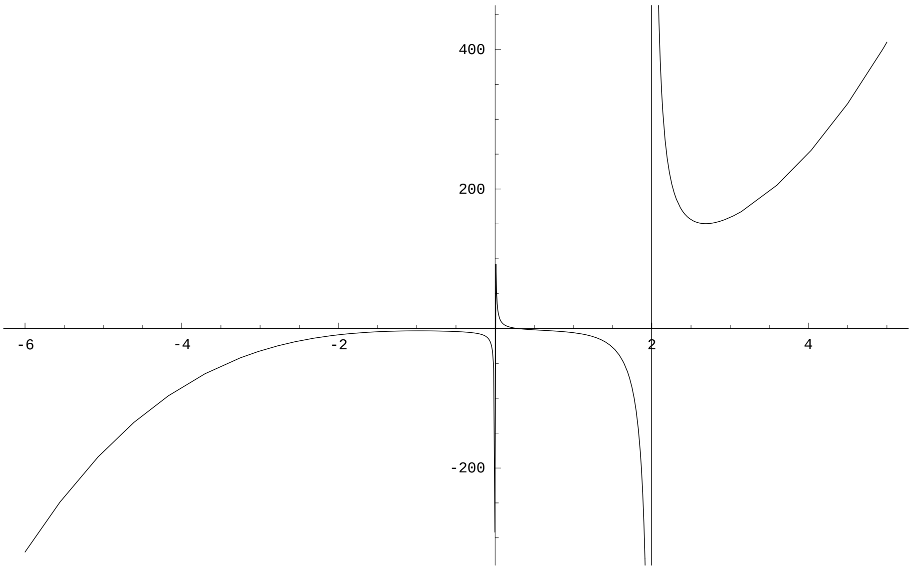
$$
\begin{array}{l}
(x^5 - 7x^2 + 13x - 2) : (x^2 + 7) = x^3 - 7x - 7 + \frac{62x+51}{x^2+7} \\
-\underline{(x^5 + 7x^3)} \\
\qquad -7x^3 - 7x^2 + 13x - 2 \\
\qquad -\underline{(-7x^3 - 49x)} \\
\qquad\qquad -7x^2 + 62x - 2 \\
\qquad\qquad -\underline{(-7x^2 - 49)} \\
\qquad\qquad\qquad 62x + 51
\end{array}
$$

Für $|x| \to \infty$ verhält sich demnach g wie das Polynom $x^3 - 7x - 7$.

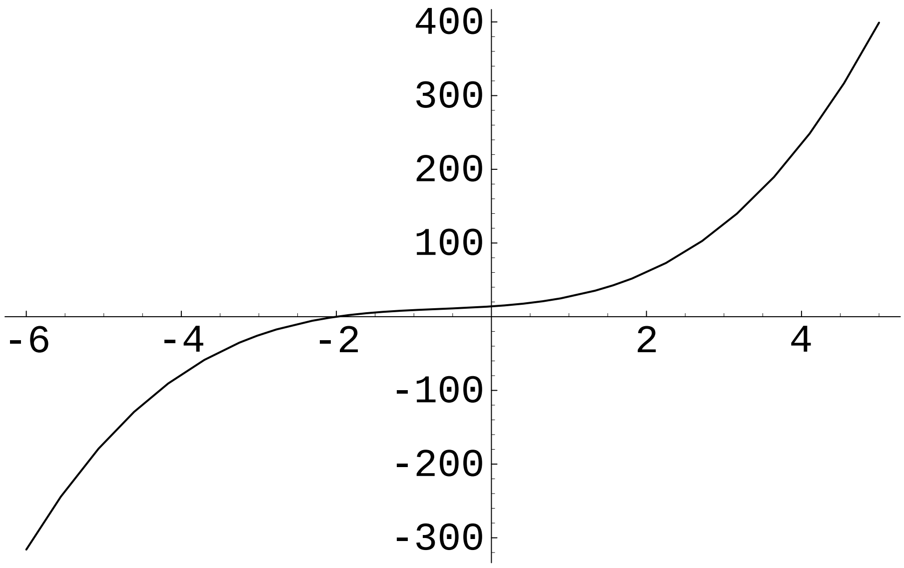
Zu (b):
Polynomdivision liefert:

$$
\begin{array}{rl}
(2x^5 - x^3 + 7x - 2) : (x^2 - 2x) = 2x^3 + 4x^2 + 7x + 14 + \frac{21x-2}{x^2-2x} \\
-\underline{(2x^5 - 4x^4)} \\
4x^4 - x^3 + 7x - 2 \\
-\underline{(4x^4 - 8x^3)} \\
7x^3 + 7x - 2 \\
-\underline{(7x^3 - 14x^2)} \\
14x^2 + 7x - 2 \\
-\underline{(14x^2 - 14x)} \\
21x - 2
\end{array}
$$

Somit verhält sich g wie $2x^3 + 4x^2 + 7x + 14$ für $|x| \to \infty$. Der Graph von g sieht wie folgt aus:



Zum Vergleich hier der Graph von $2x^3 + 4x^2 + 7x + 14$:



Aufgabe 3

(a) Berechnen Sie mit Hilfe von bekannten Auswertungen und Additionstheoremen aus der Vorlesung:

$$\text{(i)}\quad \sin(15^\circ) \qquad \text{(ii)}\quad \cos(15^\circ) \qquad \text{(iii)}\quad \sin(-735^\circ)+\sin(75^\circ)$$

$$\text{(iv)}\quad \cos^2(133^\circ)+\cos^2(43^\circ) \qquad \text{(v)}\quad \cos^2(-345^\circ)+\sin^4(150^\circ)+\cos^2(165^\circ)+\cos^4(300^\circ)$$

(b) Zeigen Sie mit bereits bekannten Additionstheoremen aus der Vorlesung:

$$\text{(i)}\ \sin(x+y)\sin(x-y)=\cos^2(y)-\cos^2(x) \qquad \text{(ii)}\ \cos(x+y)\cos(x-y)=\cos^2(y)-\sin^2(x)$$

Hinweis: Sie können Ihre Lösungen in Teil (a) mit dem Taschenrechner nachprüfen.

Lösungen zu Aufgabe 3

Zu (i):

$$\begin{aligned}
\sin(15^\circ) &= \sin(60^\circ-45^\circ)\\
&= \sin(60^\circ)\cos(-45^\circ)+\cos(60^\circ)\sin(-45^\circ)\\
&= \sin(60^\circ)\cos(45^\circ)-\cos(60^\circ)\sin(45^\circ)\\
&= \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\\
&= \frac{1}{2\sqrt{2}}(\sqrt{3}-1)
\end{aligned}$$

Zu (ii):

$$\begin{aligned}
\cos(15^\circ) &= \cos(60^\circ-45^\circ)\\
&= \cos(60^\circ)\cos(-45^\circ)-\sin(60^\circ)\sin(-45^\circ)\\
&= \cos(60^\circ)\cos(45^\circ)+\sin(60^\circ)\sin(45^\circ)\\
&= \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\\
&= \frac{1}{2\sqrt{2}}(1+\sqrt{3})
\end{aligned}$$

Zu (iii):

$$\begin{aligned}
\sin(-735^\circ)+\sin(75^\circ) &= \sin(-720^\circ-15^\circ)+\sin(90^\circ-15^\circ)\\
&= \sin(-15^\circ)+\cos(15^\circ)\\
&= -\sin(15^\circ)+\cos(15^\circ)\\
&= \frac{1}{2\sqrt{2}}(1-\sqrt{3})+\frac{1}{2\sqrt{2}}(\sqrt{3}+1)=\frac{1}{\sqrt{2}}
\end{aligned}$$

Zu (iv):

$$\begin{aligned}
\cos^2(133^\circ)+\cos^2(43^\circ) &= (-\cos(180^\circ-133^\circ))^2+\cos^2(90^\circ-47^\circ)\\
&= \cos^2(47^\circ)+\sin^2(47^\circ)=1
\end{aligned}$$

Zu (v):

$$
\begin{aligned}
& \cos^2(-345°) + \sin^4(150°) + \cos^2(165°) + \cos^4(300°) \\
= \;& \cos^2(-345° + 360°) + \sin^4(180° - 150°) + (-\cos(180° - 165°))^2 + \cos^4(300° - 360°) \\
= \;& \cos^2(15°) + \sin^4(30°) + \cos^2(15°) + \cos^4(-60°) \\
= \;& 2\cos^2(15°) + \sin^4(30°) + \cos^4(60°) \\
= \;& 2\left(\frac{1}{2\sqrt{2}}(1+\sqrt{3})\right)^2 + \frac{1}{16} + \frac{1}{16} \\
= \;& \frac{1}{4}(4 + 2\sqrt{3}) + \frac{1}{8} \\
= \;& \frac{1}{8}(9 + 4\sqrt{3})
\end{aligned}
$$

Zu (b), Teil (i):

$$
\begin{aligned}
\sin(x+y)\sin(x-y) &= (\sin(x)\cos(y) + \cos(x)\sin(y)) \cdot (\sin(x)\cos(-y) + \cos(x)\sin(-y)) \\
&= (\sin(x)\cos(y) + \cos(x)\sin(y)) \cdot (\sin(x)\cos(y) - \cos(x)\sin(y)) \\
&= \sin^2(x)\cos^2(y) - \sin(x)\sin(y)\cos(x)\cos(y) \\
&\quad + \sin(x)\sin(y)\cos(x)\cos(y) - \cos^2(x)\sin^2(y) \\
&= \sin^2(x)\cos^2(y) - \cos^2(x)\sin^2(y) \\
&= \sin^2(x)\cos^2(y) - \cos^2(x)(1 - \cos^2(y)) \\
&= \sin^2(x)\cos^2(y) - \cos^2(x) + \cos^2(x)\cos^2(y) \\
&= (\sin^2(x) + \cos^2(x))\cos^2(y) - \cos^2(x) \\
&= \cos^2(y) - \cos^2(x)
\end{aligned}
$$

Teil (ii):

$$
\begin{aligned}
\cos(x+y)\cos(x-y) &= (\cos(x)\cos(y) + \sin(x)\sin(y)) \cdot (\cos(x)\cos(-y) + \sin(x)\sin(-y)) \\
&= (\cos(x)\cos(y) + \sin(x)\sin(y)) \cdot (\cos(x)\cos(y) - \sin(x)\sin(y)) \\
&= \cos^2(x)\cos^2(y) + \sin(x)\sin(y)\cos(x)\cos(y) \\
&\quad - \sin(x)\sin(y)\cos(x)\cos(y) - \sin^2(x)\sin^2(y) \\
&= \cos^2(x)\cos^2(y) - \sin^2(x)\sin^2(y) \\
&= \cos^2(x)\cos^2(y) - \sin^2(x)(1 - \cos^2(y)) \\
&= \cos^2(x)\cos^2(y) - \sin^2(x) + \sin^2(x)\cos^2(y) \\
&= (\sin^2(x) + \cos^2(x))\cos^2(y) - \sin^2(x) \\
&= \cos^2(y) - \sin^2(x)
\end{aligned}
$$

Aufgabe 4

(a) Benutzen Sie die Formel für $\cos(2x)$, um $\cos(\frac{\pi}{8})$ und $\sin(\frac{\pi}{8})$ zu *berechnen*.

(b) Benutzen Sie das Additionstheorem für sin, sowie die Formel für $\cos(2x)$ und $\sin(2x)$ um herzuleiten, dass

$$\sin(5x) = \sin x \cdot (4\cos^2(2x) + 2\cos(2x) - 1)$$

gilt. Berechnen Sie damit $\cos(\frac{2\pi}{5})$.

(c) Dem Kreis mit Radius R werde ein regelmäßiges 5-eck einbeschrieben. Berechnen Sie den Flächeninhalt des 5-ecks.

Lösungen zu Aufgabe 4

Zu (a): Es gilt $\cos(2x) = 2\cos^2 x - 1$. Wir wählen $x = \frac{\pi}{8}$ und finden, dass $t := \cos(\pi/8)$ die Gleichung

$$2t^2 - 1 = \cos(\pi/4) = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

löst. Also ist

$$t = \sqrt{\frac{1+\sqrt{2}}{2\sqrt{2}}}\,.$$

Daraus folgt

$$\sin(\frac{\pi}{8}) = \sqrt{1-t^2} = \sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{2\sqrt{2}}}\,.$$

Zu (b): Es gilt

$$\begin{aligned}
\sin(5x) &= \sin x\cos(4x) + \cos x \sin(4x)\\
&= \sin x\cos(4x) + 2\cos x\sin(2x)\cos(2x)\\
&= \sin x\cos(4x) + 4\cos^2 x\sin x\cos(2x)\\
&= \sin x\Big(2\cos^2(2x) - 1 + 4\cos^2 x\cos(2x)\Big)\\
&= \sin x\Big(2\cos^2(2x) - 1 + 2(\cos(2x)+1)\cos(2x)\Big)\\
&= \sin x\Big(4\cos^2(2x) + 2\cos(2x) - 1\Big)\\
&= 4\sin x\Big(\cos^2(2x) + \frac{1}{2}\cos(2x) - \frac{1}{4}\Big)
\end{aligned}$$

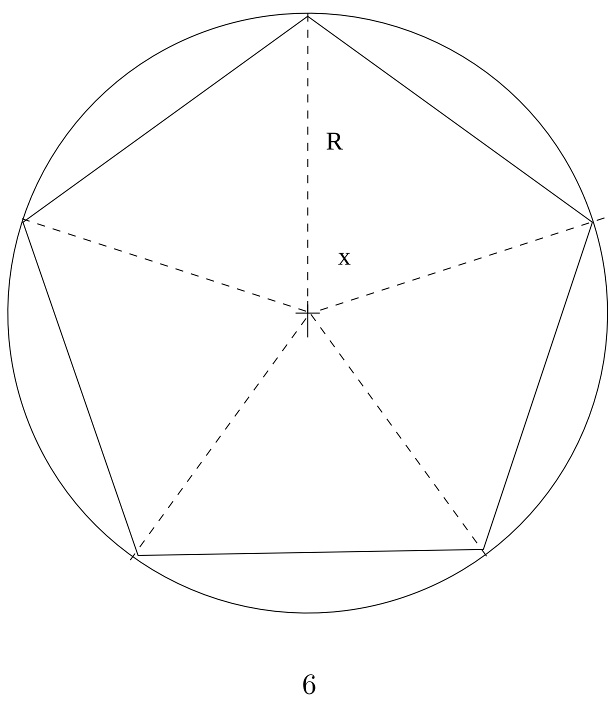
Jetzt sei $x = \pi/5$ und $s = \cos(2\pi/5)$. Dann löst s die Gleichung

$$s^2 + \frac{1}{2}s = \frac{1}{4}\,,$$

also ist

$$\cos(2\pi/5) = s = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$$

Zu (c): Hier ist ein Bild:



Jedes Teildreick hat die Seitenlängen R und $R_1 := \sqrt{2R^2 - 2R^2 \cos x} = R\sqrt{2}\sqrt{1-\cos x}$, wobei $x = \frac{2\pi}{5}$. Seine Höhe ist jetzt $h = \sqrt{R^2 - (R_1/2)^2} = R\sqrt{1+\cos x}/\sqrt{2}$. Der Flächeninhalt eines Teildreiecks ist dann $A' = R^2\sqrt{1-\cos^2 x} = R^2 \sin(2\pi/5) = \frac{1}{4}R^2\sqrt{10+2\sqrt{5}}$ und der Gesamtflächeninhalt

$$A = 5A' = \frac{5}{4}R^2\sqrt{10+2\sqrt{5}}\,.$$