

Übungsaufgaben, Blatt 12

Kleingruppen zur Service-Veranstaltung Mathematik I für Ingenieure bei Prof. Dr. G. Herbort
im WS12/13 – Dipl.-Math. T. Pawlaschyk, 15.01.12

Thema: Rationale und trigonometrische Funktionen

Aufgabe 1

(a) Sei $f(x) = x^4 + x^3 - 20x^2 + 72$. Zeigen Sie, dass $x_0 = 3$ und $x_1 = -2$ Nullstellen von f sind. Finden Sie ein Polynom g vom Grad 2, so dass $f(x) = (x - 3)(x + 2)g(x)$ gilt. Was sind die Nullstellen von g ?

(b) Sei $f(x) = x^6 - 4x^5 - 6x^4 - 68x^3 - 223x^2 - 240x - 84$. Zeigen Sie, dass $x_0 = -1$ und $x_1 = 7$ Nullstellen von f sind und bestimmen Sie jeweils ihre Vielfachheit.

(c) Sei $f(x) = x^3 + 14x^2 + 37x + 59$. Bestimmen Sie Koeffizienten $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, so dass f die folgende Form hat:

$$f(x) = a(x + 2)^3 + b(x + 2)^2 + c(x + 2) + d$$

Hinweis: Benutzen Sie das Horner-Schema.

Aufgabe 2 Untersuchen Sie das asymptotische Verhalten folgender rationaler Funktionen für $|x| \rightarrow \infty$.

$$(a) \quad f(x) = \frac{x^5 - 7x^2 + 13x - 2}{x^2 + 7} \quad (b) \quad g(x) = \frac{2x^5 - x^3 + 7x - 2}{x^2 - 2x}$$

Skizzieren Sie den Graphen von g .

Hinweis: Benutzen Sie Polynomdivision.

Aufgabe 3

(a) Berechnen Sie mit Hilfe von bekannten Auswertungen und Additionstheoremen aus der Vorlesung:

$$(i) \quad \sin(15^\circ) \quad (ii) \quad \cos(15^\circ) \quad (iii) \quad \sin(-735^\circ) + \sin(75^\circ) \\ (iv) \quad \cos^2(133^\circ) + \cos^2(43^\circ) \quad (v) \quad \cos^2(-345^\circ) + \sin^4(150^\circ) + \cos^2(165^\circ) + \cos^4(300^\circ)$$

(b) Zeigen Sie mit bereits bekannten Additionstheoremen aus der Vorlesung:

$$(i) \quad \sin(x + y) \sin(x - y) = \cos^2(y) - \cos^2(x) \quad (ii) \quad \cos(x + y) \cos(x - y) = \cos^2(y) - \sin^2(x)$$

Hinweis: Sie können Ihre Lösungen in Teil (a) mit dem Taschenrechner nachprüfen.

Aufgabe 4

(a) Benutzen Sie die Formel für $\cos(2x)$, um $\cos(\frac{\pi}{8})$ und $\sin(\frac{\pi}{8})$ zu berechnen.

(b) Benutzen Sie das Additionstheorem für \sin , sowie die Formel für $\cos(2x)$ und $\sin(2x)$ um herzuleiten, dass

$$\sin(5x) = \sin x \cdot (4 \cos^2(2x) + 2 \cos(2x) - 1)$$

gilt. Berechnen Sie damit $\cos(\frac{2\pi}{5})$.

(c) Dem Kreis mit Radius R werde ein regelmäßiges 5-eck eingeschrieben. Berechnen Sie den Flächeninhalt des 5-ecks.