BERGISCHE UNIVERSITÄT WUPPERTAL

die studien eingangsphase

GEFÖRDERT VOM Bundesministerium für Bildung und Forschung

Musterlösungen zu Blatt 11

Kleingruppen zur Service-Veranstaltung Mathematik I für Ingenieure bei Prof. Dr. G. Herbort im WS12/13 – Dipl.-Math. T. Pawlaschyk, 08.01.12

Themen: Funktionen und Stetigkeit

Aufgabe 1

(a) Seien zwei Funktionen f und g gegeben. Bestimmen Sie jeweils $f \circ g$ and $g \circ f$.

(i) $f(x) = x^2 - 3x + 2, \quad g(x) = x^3 - 2$ (ii) $f(x) = \sqrt{x^2 - 9}, \quad g(x) = x^4 + 2x^2 + 3$

(b) Bestimmen Sie jeweils das größtmögliche Intervall, auf dem f eine Umkehrfunktion besitzt. Berechnen Sie f^{-1}.

(i) $f(x) = 6x^2 + 4x - 2$ (ii) $f(x) = 8x^2 + 10x - 3$ (iii) $f(x) = \dfrac{1}{1-x}$

Lösungen zu Aufgabe 1

Zu (a), Teil (i):

$$(f \circ g)(x) = (x^3 - 2)^2 - 3(x^3 - 2) + 2 = x^6 - 7x^3 + 12$$

$$(g \circ f)(x) = (x^2 - 3x + 2)^3 - 2 = x^6 - 9x^5 + 33x^4 - 63x^3 + 66x^2 - 18x + 6$$

Zu Teil (ii):

$$(f \circ g)(x) = \sqrt{(x^4 + 2x^2 + 3)^2 - 9} = x\sqrt{x^6 + 4x^4 + 10x^2 + 12}$$

$$(g \circ f)(x) = (x^2 - 9)^2 + 2(x^2 - 9) + 3 = x^4 - 16x^2 + 66$$

Zu (b), Teil (i):
Wir schreiben f in Scheitelpunktform:

$$f(x) = 6x^2 + 4x - 2 = 6(x + \frac{1}{3})^2 - \frac{8}{3} = y$$

Dann ist f jeweils auf $I_1 := [-\frac{1}{3}, \infty)$ und $I_2 := (-\infty, -\frac{1}{3}]$ invertierbar. Die jeweiligen Umkehrfunktionen sind auf $J := [-\frac{8}{3}, \infty)$ wie folgt definiert:

$$f^{-1} : J \to I_1, \quad x = f^{-1}(y) = -\frac{1}{3} + \sqrt{\frac{1}{6}y + \frac{4}{9}}$$

und

$$f^{-1} : J \to I_2, \quad x = f^{-1}(y) = -\frac{1}{3} - \sqrt{\frac{1}{6}y + \frac{4}{9}}$$

Die Umkehrfunktionen erhält man nach Auflösen von $f(x) = y$ nach x.

Zu Teil (ii):
Wie in Teil (i) schreiben wir f in Scheitelpunktform:

$$f(x) = 8x^2 + 10x - 3 = 8(x + \frac{5}{8})^2 - \frac{49}{8} = y$$

Dann ist f jeweils auf $I_1 := [-\frac{5}{8}, \infty)$ und $I_2 := (-\infty, -\frac{5}{8}]$ invertierbar. Die jeweiligen Umkehrfunktionen sind auf $J := [-\frac{49}{8}, \infty)$ wie folgt definiert:

$$f^{-1} : J \to I_1, \quad x = f^{-1}(y) = -\frac{5}{8} + \sqrt{\frac{1}{8}y + \frac{49}{64}}$$

und

$$f^{-1} : J \to I_2, \quad x = f^{-1}(y) = -\frac{5}{8} - \sqrt{\frac{1}{8}y + \frac{49}{64}}$$

Zu Teil (iii):
Es gilt:

$$\begin{aligned} f(x) = \frac{1}{1-x} = y \quad &\Leftrightarrow \quad 1 = y(1-x) \\ &\Leftrightarrow \quad 1 = y - yx \\ &\Leftrightarrow \quad 1 - y = -yx \\ &\Leftrightarrow \quad \frac{y-1}{y} = x \end{aligned}$$

Dum Umkehrfunktion von f ist also:

$$f^{-1} : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R} \setminus \{1\}, \quad f^{-1}(y) = \frac{y-1}{y}$$

Aufgabe 2

(a) Seien die Funktion f, der Punkt x_0 und eine positive Zahl ε gegeben. Bestimmen Sie jeweils ein $\delta > 0$, so dass für alle Punkte x aus dem Intervall $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ folgende Ungleichung gilt:

$$|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

(i) $f(x) = x^4 + 3x^2 - 2, \quad \varepsilon = 10^{-3}, \quad x_0 = 1$
(ii) $f(x) = \sqrt{x^3 + 1} - \sqrt{x^2 + 1}, \quad \varepsilon = 10^{-2}, \quad x_0 = 1$

Lösungen zu Aufgabe 2

Zu (a), Teil (i):
Es ist $f(1) = 2$. Da $\delta > 0$ beliebig klein gewählt werden kann, nehmen wir zunächst an, dass $\delta < 1$ ist. Aufgrund der Dreiecksungleichung erfüllt jedes $x \in \mathbb{R}$ mit $|x - 1| < \delta < 1$ auch die Abschätzung $|x| < 2$. Dann gilt:

$$\begin{aligned} |f(x) - f(1)| &= |x^4 + 3x^2 - 2 - 2| \\ &= |x^4 + 3x^2 - 4| \\ &= |x^2 - 1| \cdot |x^2 + 4| \\ &= |x - 1| \cdot |x + 1| \cdot |x^2 + 4| \\ &\overset{\Delta-\text{Ungl.}}{=} |x - 1| \cdot (|x| + 1) \cdot (|x|^2 + 4) \\ &\overset{\delta<1}{<} \delta(2 + 1)(4 + 4) = 24\delta. \end{aligned}$$

Wir können also rückwirkend $\delta = \frac{1}{24} \cdot 10^{-3}$ wählen.

Zu (a), Teil (ii):
Natürlich kann x hier nur so gewählt werden, dass $\sqrt{x^3+1}$ auch im Reellen Sinn macht, d.h. $x \geq -1$. Es ist $f(1) = 0$. Wie oben können wir annehmen, dass $\delta < 1$ ist. Wieder erfüllt jedes $x \in \mathbb{R}$ mit $|x-1| < \delta < 1$ auch die Abschätzung $|x| < 2$. Dann gilt:

$$\begin{aligned}
|f(x) - f(1)| &= \left|\sqrt{x^3+1} - \sqrt{x^2+1}\right| \cdot \frac{\sqrt{x^3+1} + \sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^3+1} + \sqrt{x^2+1}} \\
&= \frac{\left|x^3+1-x^2-1\right|}{\sqrt{x^3+1} + \sqrt{x^2+1}} \\
&= \frac{\left|x^3-x^2\right|}{\sqrt{x^3+1} + \sqrt{x^2+1}} \\
&= \frac{x^2\,|x-1|}{\sqrt{x^3+1} + \sqrt{x^2+1}} \\
&\leq \frac{x^2\,|x-1|}{1} \\
&= x^2\,|x-1| \\
&< 4\delta
\end{aligned}$$

Wähle also $\delta = \frac{1}{4} \cdot 10^{-2}$.

Aufgabe 3

(a) Überprüfen Sie jeweils, ob und wie die Funktion f in $x_0 = -1$ stetig fortsetzbar ist.

(i) $f(x) = \dfrac{x^3 - x^2 - x + 1}{x^2 + 3x + 2}$ (ii) $f(x) = \dfrac{x^4 - 5x^2 + 4}{x^3 + 2x^2 - 5x - 6}$ (iii) $f(x) = \dfrac{4x}{x^2 + 2x + 1}$

(b) Für welche Zahlen a, b ist die Funktion f stetig?

$$f(x) = \begin{cases} -x - 1 + a, & x < -1 \\ x^2 + 2, & -1 \leq x \leq 2 \\ -2x^3 + 11 + b, & x > 2 \end{cases}$$

(c) Wo ist die folgende Funktion f stetig?

$$f(x) = \begin{cases} [x][\frac{1}{x}], & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

Lösungen zu Aufgabe 3

Zu (a), Teil (i):
Man berechne mit den Verfahren der Vorlesung (Nullstellenberechnung, Horner-Schema oder Polynomdivision), dass gilt:

$$f(x) = \frac{(x+1)(x^2 - 2x + 1)}{(x+1)(x+2)} = \frac{x^2 - 2x + 1}{x + 2}$$

Somit ist die Funktion f in -1 stetig fortsetzbar durch $f(-1) = 4$.

Teil (ii):

$$f(x) = \frac{(x^2-1)(x^2-4)}{(x+1)(x^2+x-6)} = \frac{(x-1)(x^2-4)}{x^2+x-6}.$$

Die Funktion f ist also in -1 stetig fortsetzbar durch $f(-1) = -1$.

Teil (iii): Die Funktion f ist in -1 nicht stetig fortsetzbar, da $\lim_{x\to -1} |f(x)| = \infty$ ist.

Zu (b), Teil (ii):
Wir setzen in $-x-1+a$ und x^2+2 die Zahl -1 ein und erhalten, dass $a=3$ sein muss, damit die Funktion f in -1 nicht springt. Ähnlich verfahren wir bei den Teilfunktionen x^2+2 und $-2x^3+11+b$ und setzen dort 2 ein. Damit f nicht in 2 springt, muss $b=11$ sein.

Zu (c):
Für $x > 1$ ist $f(x) = 0$, ebenso wenn $x \in (0,1)$. Es ist $f(1) = 1$. Damit sehen wir, dass f bei 1 unstetig ist und auf $(0,\infty) \setminus \{1\}$ stetig. Da $f(-1/n) = -n \longrightarrow \infty$, und $f(1/n) = 0$, kann f auch in 0 nicht stetig sein. Bei allen Zahlen $x = -1/k$ mit $k \in \mathbb{N}$ ist $f(x) = k$ und $f(x-\delta) = [x-\delta][-\frac{k}{1+k\delta}] = k$ und $f(x+\delta) = [x+\delta][-\frac{k}{1-k\delta}] = k+1$, wenn $\delta > 0$. Damit ist f bei $1/k$ unstetig. Auf jedem Intervall $(-\frac{1}{k}, -\frac{1}{k+1})$ ist f konstant, also stetig. Auf $(-\infty,-1)$ ist $f(x) = -[x]$, also in den ganzzahligen x unstetig und stetig in den anderen Punkten x.

Aufgabe 4

(a) Für die Funktion $f(x) = x^3-3x+1$ bestimmen Sie mit dem Bisektionsverfahren die positiven Nullstellen von f bis auf 2 Nachkommastellen.

(b) (*Regula falsi*) Statt des Bisektionsverfahrens kann man auch das folgende Verfahren zur Nullstellenberechnung anwenden: Ist $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig und $f(a) < 0 < f(b)$, so ist die Sekante zum Graphen von f durch $(a, f(a))$ und $(b, f(b))$ gegeben durch:

$$s(x) = f(a) + \frac{x-a}{b-a}\,(f(b) - f(a))$$

Sei $\bar{a}$ die Nullstelle von s. Angenommen, $f(\bar{a}) \neq 0$. Wenn dann $f(\bar{a}) < 0$, setzen wir $a_1 = \bar{a}$, $b_1 = b$, für $f(\bar{a}) > 0$ sei $a_1 = a, b_1 = \bar{a}$. Dann wiederholen wir obigen Schritt mit $[a_1, b_1]$ statt $[a,b]$. So fahren wir fort und finden (in der Regel) schneller zu einer näherungsweisen Nullstelle von f. Man probiere dieses Verfahren an der Funktion aus Teil a) aus.

Lösungen zu Aufgabe 4

Zu (a): Es gilt $f(0.3) = 0.127, f(0.5) = -0.375$ und $f(1.5) = -0.125$, sowie $f(1.6) = 0.296$. Es gibt daher auf $[0.3,\ 0.5]$ und auf $[1.5,\ 1.6]$ jeweils eine Nullstelle.
Auf $[0.3,\ 0.5]$ wenden wir das Bisektionsverfahren an.

$f(0.4) = -0.136$, also $a_1 = 0.3,\ b_1 = 0.4$
$f(0.35) = -0.007$, also $a_2 = 0.3,\ b_2 = 0.35$
$f(0.325) = 0.05$, also $a_3 = 0.325,\ b_3 = 0.35$
$f(0.335) = 0.0259$, also $a_4 = 0.335,\ b_4 = 0.35$
$f(0.3425) = 0.012$, also $a_5 = 0.3425,\ b_5 = 0.35$
$f(0.34625) = 0.002$, also $a_6 = 0.34625,\ b_6 = 0.35$
$f(0.348125) = -0.002$, also $a_7 = 0.34625,\ b_7 = 0.348125$
$f(0.3471875) = 0.0002$, also $a_8 = 0.34625,\ b_8 = 0.3471875$
Damit ist 0.34 bis auf 2 Nachkommastellen genauer Näherungswert.

Für das Intervall $[1.5,\ 1.6]$, das ebenfalls eine Nullstelle von f enthält, geht es genauso.

$f(1.55) = 0.07$, also $a_1 = 1.5,\ b_1 = 1.55$
$f(1.525) = -0.028$, also $a_2 = 1.525,\ b_2 = 1.55$
$f(1.5375) = 0.022$, also $a_3 = 1.525,\ b_3 = 1.5375$
$f(1.53125) = -0.0033$, also $a_3 = 1.53125,\ b_3 = 1.5375$
$f(1.53438) = 0.009$
Bis auf 2 Nachkommastellen korrekt ist also die Nullstelle 1.53 .

Aber $f(-2) = -1$ und $f(-1) = 3$, so dass auch im Intervall $(-2,\ -1)$ eine Nullstelle auftritt. Als Polynom 3. Grades hat aber f höchsten 3 Nullstellen. Die positiven Nullstellen von f liegen also bei den angegebenen Werten, weitere positive Nullstellen hat f nicht.

Zu (b):
Es gilt

$$\bar{a} = \frac{af(b) - bf(a)}{f(b) - f(a)} = 0.350598$$

Da $f(\bar{a}) = -0.00867$, setzen wir $a_1 = 0.3,\ b_1 = \bar{a}$
wir erhalten nun $\bar{a}_1 = \frac{a_1 f(b_1) - b_1 f(a_1)}{f(b_1) - f(a_1)} = 0.347354$
Da $f(\bar{a}_1) = -0.00015$, wählen wir $a_2 = 0.3,\ b_2 = \bar{a}_1$.
Es gilt $f(\bar{a}_2) = -2 \cdot 10^{-6}$. Somit ist $\bar{a}_2 = 0.34729$ eine gute Näherung, die im 3. Schritt gefunden wurde.

Mit dem Intervall $[1.5,\ 1.6]$ geht es genauso.
Es gilt nun $\bar{a} = 1.52969$ und $f(\bar{a}) = -0.009$, also $a_1 = \bar{a},\ b_1 = 1.6$.
Dann ist $\bar{a}_1 = 1.53191$ und $f(\bar{a}_1) = -0.0007$. Sei daher $a_2 = \bar{a}_1$ und $b_2 = 1.6$. Wir bilden $\bar{a}_2 = 1.53208$ und finden $f(\bar{a}_2) = -0.00005$. Als gute Näherungsnullstelle taugt daher 1.53208.