Übungsaufgaben, Blatt 11

Kleingruppen zur Service-Veranstaltung Mathematik I für Ingenieure bei Prof. Dr. G. Herbort
im WS12/13 – Dipl.-Math. T. Pawlaschyk, 08.01.12

Themen: Funktionen und Stetigkeit

Aufgabe 1

(a) Seien zwei Funktionen f und g gegeben. Bestimmen Sie jeweils $f \circ g$ and $g \circ f$.

(i) $f(x) = x^2 - 3x + 2, \quad g(x) = x^3 - 2$ (ii) $f(x) = \sqrt{x^2 - 9}, \quad g(x) = x^4 + 2x^2 + 3$

(b) Bestimmen Sie jeweils das größtmögliche Intervall, auf dem f eine Umkehrfunktion besitzt. Berechnen Sie f^{-1}.

(i) $f(x) = 6x^2 + 4x - 2$ (ii) $f(x) = 8x^2 + 10x - 3$ (iii) $f(x) = \dfrac{1}{1-x}$

Aufgabe 2

(a) Seien die Funktion f, der Punkt x_0 und eine positive Zahl ε gegeben. Bestimmen Sie jeweils ein $\delta > 0$, so dass für alle Punkte x aus dem Intervall $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ folgende Ungleichung gilt:

$$|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

(i) $f(x) = x^4 + 3x^2 - 2, \quad \varepsilon = 10^{-3}, \quad x_0 = 1$
(ii) $f(x) = \sqrt{x^3+1} - \sqrt{x^2+1}, \quad \varepsilon = 10^{-2}, \quad x_0 = 1$

Aufgabe 3

(a) Überprüfen Sie jeweils, ob und wie die Funktion f in $x_0 = -1$ stetig fortsetzbar ist.

(i) $f(x) = \dfrac{x^3 - x^2 - x + 1}{x^2 + 3x + 2}$ (ii) $f(x) = \dfrac{x^4 - 5x^2 + 4}{x^3 + 2x^2 - 5x - 6}$ (iii) $f(x) = \dfrac{4x}{x^2 + 2x + 1}$

(b) Für welche Zahlen a, b ist die Funktion f stetig?

$$f(x) = \begin{cases} -x - 1 + a, & x < -1 \\ x^2 + 2, & -1 \le x \le 2 \\ -2x^3 + 11 + b, & x > 2 \end{cases}$$

(c) Wo ist die folgende Funktion f stetig?

$$f(x) = \begin{cases} [x][\frac{1}{x}], & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

Aufgabe 4

(a) Für die Funktion $f(x) = x^3 - 3x + 1$ bestimmen Sie mit dem Bisektionsverfahren die positiven Nullstellen von f bis auf 2 Nachkommastellen.

(b) (*Regula falsi*) Statt des Bisektionsverfahrens kann man auch das folgende Verfahren zur Nullstellenberechnung anwenden: Ist $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig und $f(a) < 0 < f(b)$, so ist die Sekante zum Graphen von f durch $(a, f(a))$ und $(b, f(b))$ gegeben durch:

$$s(x) = f(a) + \frac{x-a}{b-a}\,(f(b) - f(a))$$

Sei $\bar{a}$ die Nullstelle von s. Angenommen, $f(\bar{a}) \neq 0$. Wenn dann $f(\bar{a}) < 0$, setzen wir $a_1 = \bar{a}$, $b_1 = b$, für $f(\bar{a}) > 0$ sei $a_1 = a, b_1 = \bar{a}$. Dann wiederholen wir obigen Schritt mit $[a_1, b_1]$ statt $[a, b]$. So fahren wir fort und finden (in der Regel) schneller zu einer näherungsweisen Nullstelle von f. Man probiere dieses Verfahren an der Funktion aus Teil a) aus.