BERGISCHE UNIVERSITÄT WUPPERTAL
die studien eingangs phase
GEFÖRDERT VOM Bundesministerium für Bildung und Forschung

Musterlösungen zu Blatt 10

Kleingruppen zur Service-Veranstaltung Mathematik I für Ingenieure bei Prof. Dr. G. Herbort im WS12/13 – Dipl.-Math. T. Pawlaschyk, 19.12.12

Themen: Konvergenz von Folgen

Aufgabe 1

(i) Sei $a_n := \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{2^k}$. Zeigen Sie, dass $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ monoton wächst und nach oben beschränkt ist, und bestimmen Sie den Grenzwert der Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Zeigen Sie dazu induktiv, dass $a_n = 2 - \frac{n+2}{2^n}$ ist.

(ii) Sei $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ rekursiv definiert durch

$$b_1 = \frac{1}{2} \quad \text{und} \quad b_n = \frac{b_{n-1}}{1 + n2^n \cdot b_{n-1}},\ n \geq 2.$$

Bestimmen Sie den Grenzwert von $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$, indem Sie induktiv zeigen, dass $\frac{1}{b_n} = (n-1)2^{n+1} + 2$ ist.

(iii) Seien die nachstehenden Folgen gegeben:

$$c_k := \frac{8k^2 + 5}{7 + 3k^2} \quad \text{und} \quad s_n := \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} c_k.$$

Bestimmen Sie den Grenzwert c von $(c_k)_{k\in\mathbb{N}}$ und zeigen Sie, dass auch die Folge $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen den gleichen Grenzwert konvergiert. Betrachten Sie dazu die Differenz $|s_n - c|$ und schätzen Sie diese geeignet nach oben ab.
Finden Sie eine Folge $(c_k)_{k\in\mathbb{N}}$, sodass $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ aber nicht $(c_k)_{k\in\mathbb{N}}$ konvergiert.

Lösungen zu Aufgabe 1

Zu (i): Da $a_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{2^k}$ eine Summe von positiven Zahlen ist, ist die Folge monoton wachsend und $a_n > 0$. Wir zeigen induktiv, dass $a_n = 2 - \frac{n+2}{2^n}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt. Für $n = 1$ ist $a_1 = \frac{1}{2} = 2 - \frac{3}{2}$. Wir schließen von n nach $n+1$. Dann gilt:

$$\begin{aligned}
a_{n+1} &= \sum_{k=1}^{n+1} \frac{k}{2^k} \\
&= a_n + \frac{n+1}{2^{n+1}} \\
&\overset{\text{Ind.-vor.}}{=} 2 - \frac{n+2}{2^n} + \frac{n+1}{2^{n+1}} \\
&= 2 - \frac{2(n+2) - (n+1)}{2^{n+1}} \\
&= 2 - \frac{n+3}{2^{n+1}} = 2 - \frac{(n+1)+2}{2^{n+1}}
\end{aligned}$$

Die Folge a_n ist demnach auch nach oben durch 2 beschränkt. Für den Grenzwert gilt

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} 2 - \frac{n+2}{2^n} = 2.$$

Zu (ii): Wir setzen $a_n := \frac{1}{b_n}$. Dann gilt

$$a_n = \frac{1}{b_n} = \frac{1 + n2^n \cdot b_{n-1}}{b_{n-1}} = \frac{1}{b_{n-1}} + n2^n = a_{n-1} + n2^n.$$

Wir weisen nun induktiv nach, dass $a_n = (n-1)2^{n+1} + 2$ gilt. Für $n = 1$ ist $a_1 = \frac{1}{b_1} = 2 = (1-1)2^{1+1} + 2$. Wir schließen von $n-1$ nach n. Dann gilt

$$\begin{aligned} a_n &= a_{n-1} + n2^n \\ &\overset{\text{I.V.}}{=} ((n-1)-1)2^{(n-1)+1} + 2 + n2^n \\ &= (n-2)2^n + 2 + n2^n \\ &= (2n-2)2^n + 2 \\ &= (n-1)2^{n+1} + 2 \end{aligned}$$

Dann ist $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$ und damit $\lim_{n\to\infty} b_n = 0$.

Zu (iii): Für den Grenzwert von $(c_k)_k$ gilt:

$$\lim_{k\to\infty} c_k = \lim_{k\to\infty} \frac{8k^2+5}{7+3k^2} = \lim_{k\to\infty} \frac{8 + \frac{5}{k^2}}{\frac{7}{k^2} + 3} = \frac{8}{3} = c.$$

Wir betrachten die Differenz $|s_n - c|$ mit $s_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} c_k$:

$$\begin{aligned} |s_n - c| &= \left| \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{8k^2+5}{7+3k^2} - \frac{8}{3} \right| \\ &= \left| \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{8k^2+5}{7+3k^2} - \frac{8}{3} \right) \right| \\ &= \left| \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{3(8k^2+5) - 8(7+3k^2)}{3(7+3k^2)} \right| \\ &= \left| \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{24k^2 + 15 - 56 - 24k^2)}{3(7+3k^2)} \right| \\ &= \left| \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{-41}{3(7+3k^2)} \right| \\ &\leq \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \left| \frac{-41}{3(7+3k^2)} \right| \\ &\leq \frac{41}{9n} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} \leq \frac{82}{9n} \end{aligned}$$

Die Differenz $|s_n - c|$ ist also eine Nullfolge. Die Summen s_n konvergieren gegen c für $n \to \infty$.

Hierbei haben wir ausgenutzt, dass $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} \leq 2$ ist für alle n. Dies zeigt man wie folgt:

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} &= 1 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^2} \\ &\leq 1 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k(k-1)} \\ &= 1 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k} \\ &= 1 + 1 - \frac{1}{n} < 2\end{aligned}$$

Sei $c_k = (-1)^k$. Diese Folge konvergiert nicht. Es ist $s_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(-1)^k = 0$, falls n gerade und $s_n = -\frac{1}{n}$, falls n ungerade. Also konvergiert $(s_n)_n$ gegen Null.

Aufgabe 2

(a) Seien $a, b > 0$ und $a_1 = \sqrt{ab}$ und $b_1 = \frac{1}{2}(a+b)$. Definiere für $n \geq 2$ die Folgenglieder

$$a_n = \sqrt{a_{n-1}b_{n-1}} \quad \text{und} \quad b_n = \frac{1}{2}(a_{n-1} + b_{n-1}).$$

Zeigen Sie, dass stets $a_n \leq b_n$ und dass $(a_n)_n$ monoton wächst und $(b_n)_n$ monoton fällt. Zeigen Sie, dass $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergieren, und zwar mit dem gleichen Grenzwert.

(b) Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ die durch

$$a_1 := \sqrt{2} \quad \text{und} \quad a_{n+1} := \sqrt{2 + a_n}$$

rekursiv definierte Folge. Zeigen Sie, dass die Folge monoton wächst und nach oben beschränkt ist, nämlich $a_n \leq 2$. Berechnen Sie $\lim_{n\to\infty} a_n$.

Lösungen zu Aufgabe 2

Zu (a): Es gilt $x + y - 2\sqrt{xy} = (\sqrt{x} - \sqrt{y})^2 \geq 0$ für alle $x, y \geq 0$. Daraus erhalten wir $a_n \leq b_n$. Weiter ist $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \sqrt{\frac{b_n}{a_n}} \geq 1$ und $b_{n+1} - b_n = \frac{1}{2}(a_n - b_n) \leq 0$. Wir haben also $a_1 \leq a_n \leq b_n \leq b_1$. Damit konvergieren beide Folgen gegen Grenzwerte a_0 bzw. b_0. Für diese gilt aber

$$a_0 = \sqrt{a_0 b_0}, \quad b_0 = \frac{1}{2}(a_0 + b_0)\,.$$

Das ergibt aber $a_0 = b_0$.

Zu (b): Induktiv zeigen wir $a_n \leq 2$. Das gilt für a_1 offensichtlich. Gilt es für n, so haben wir $a_{n+1} = \sqrt{a_n + 2} \leq \sqrt{2+2} = 2$, also gilt die Abschätzung auch für $n+1$.
Die Folge wächst monoton, denn

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \sqrt{\frac{2}{a_n^2} + \frac{1}{a_n}} \geq \sqrt{\frac{2}{4} + \frac{1}{2}} = 1\,.$$

Der Grenzwert a der Folge existiert und erfüllt die Gleichung $a = \sqrt{2+a}$. Somit ist $a = 2$.

Aufgabe 3 Seien $a > 0$ und $a_0 > 0$. Sei $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ rekursiv definiert durch

$$b_1 = a_0 \quad \text{und} \quad b_{n+1} = \frac{b_n^2 + 3a}{3b_n^2 + a} b_n$$

(i) Zeigen Sie (induktiv), dass aus $a_0 > \sqrt{a}$ bzw. $a_0 < \sqrt{a}$ auch $b_n > \sqrt{a}$ bzw. $b_n < \sqrt{a}$ folgt, indem Sie nachstehende Gleichheit feststellen:

$$b_{n+1} - \sqrt{a} = \frac{(b_n - \sqrt{a})^3}{3b_n^2 + a}.$$

(ii) Untersuchen Sie $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ auf Monotonie, indem Sie die Differenz $b_{n+1} - b_n$ betrachten und die Fallunterscheidung $a_0 > \sqrt{a}$ bzw. $a_0 < \sqrt{a}$ aus (i) benutzen.

(iii) Folgern Sie, dass $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert und weisen Sie nach, dass der Grenzwert gleich $\sqrt{a}$ ist.

Lösungen zu Aufgabe 3

Zu (i): Es gilt:

$$\begin{aligned}
b_{n+1} - \sqrt{a} &= \frac{b_n^2 + 3a}{3b_n^2 + a} b_n - \sqrt{a} \\
&= \frac{b_n^3 + 3ab_n}{3b_n^2 + a} - \sqrt{a} \\
&= \frac{b_n^3 + 3ab_n - \sqrt{a}(3b_n^2 + a)}{3b_n^2 + a} \\
&= \frac{b_n^3 + 3ab_n - 3b_n^2\sqrt{a} - a\sqrt{a}}{3b_n^2 + a} \\
&= \frac{(b_n - \sqrt{a})^3}{3b_n^2 + a}.
\end{aligned}$$

Ist nun $a_0 > \sqrt{a}$, so ist $b_1 - \sqrt{a} > 0$. Wir schließen von n auf $n+1$. Ist also $b_n - \sqrt{a} > 0$, so folgt mit der obigen Formel, dass auch $b_{n+1} - \sqrt{a} > 0$ ist. Der Fall $a_0 < \sqrt{a}$ geht analog.

Zu (ii): Wir haben

$$\begin{aligned}
b_{n+1} - b_n &= \frac{b_n^2 + 3a}{3b_n^2 + a} b_n - b_n \\
&= \left(\frac{b_n^2 + 3a}{3b_n^2 + a} - 1 \right) b_n \\
&= \left(\frac{b_n^2 + 3a - 3b_n^2 - a}{3b_n^2 + a} \right) b_n \\
&= \left(\frac{-2b_n^2 + 2a}{3b_n^2 + a} \right) b_n \\
&= 2b_n \left(\frac{a - b_n^2}{3b_n^2 + a} \right)
\end{aligned}$$

Ist nun $a_0 = b_1 > \sqrt{a}$, so sind nach Teil (i) auch $b_n > \sqrt{a}$, also $b_n^2 - a > 0$. Die Folge $(b_n)_n$ ist dann monoton fallend. Im Falle $a_0 = b_1 < \sqrt{a}$ ist sie monoton steigend.

Zu (iii): Nach Teil (i) und (ii) ist die Folge $(b_n)_n$ konvergent. Sei b ihr Grenzwert. Dann gilt:

$$\begin{aligned}
& b = \frac{b^2 + 3a}{3b^2 + a} b \\
\Leftrightarrow \quad & 3b^2 + a = b^2 + 3a \\
\Leftrightarrow \quad & b^2 = a
\end{aligned}$$

Aufgabe 4

Ist $(a_n)_n$ eine Folge reeller Zahlen, so bezeichnen wir einen Wert a^* als Häufungswert der Folge $(a_n)_n$, wenn eine Teilfolge aus $(a_n)_n$ ausgewählt werden kann, die gegen a^* konvergiert.
Bestimmen Sie zu der Folge

$$a_n := \frac{4^n + (-5)^n}{4^n + 5^n}$$

und zu der rekursiv definierten Folge

$$a_1 := a_2 := 1 \quad \text{und} \quad a_{n+2} := a_{n+1} - a_n, \quad n \geq 1,$$

alle Häufungswerte.

Lösungen zu Aufgabe 4

Es gilt

$$a_n := \frac{(-1)^n + (4/5)^n}{1 + (4/5)^n}$$

Dies zeigt, dass 1 und -1 Häufungswerte sind.
Angenommen, es sei $c \notin \{-1, 1\}$ ein Häufungswert und $(a_{n_k})_k$ eine Teilfolge mit Limes c. Dann ist n_k für unendlich viele k gerade, oder anderenfalls ab einem genügend großen k_0 stets ungerade. Im ersten Fall strebt eine Teilfolge von $(a_{n_k})_k$ gegen 1, also kann $(a_{n_k})_k$ nicht gegen c konvergiert haben, im zweiten Fall gilt $\lim_{k\to\infty} a_{n_k} = -1 \neq c$, ebenfalls ein Widerspruch. Somit kann kein $c \notin \{-1, 1\}$ ein Häufungswert sein.

Wir beobachten, dass

$$a_{n+6} = a_{n+5} - a_{n+4} = -a_{n+3} = -(a_{n+2} - a_{n+1}) = a_n$$

Damit ist $a_{n+6p} = a_n$ für alle $p \geq 1$. Die Folgenglieder $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6$ wiederholen sich bei Durchlaufung der Folge periodisch. Es ergeben sich die Häufungswerte $a_1 = a_2 = 1, a_3 = a_6 = 0, a_4 = a_5 = -1,$.