Übungsaufgaben, Blatt 10

Kleingruppen zur Service-Veranstaltung Mathematik I für Ingenieure bei Prof. Dr. G. Herbort
im WS12/13 – Dipl.-Math. T. Pawlaschyk, 18.12.12

Themen: Konvergenz von Folgen

Aufgabe 1

(i) Sei $a_n := \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{2^k}$. Zeigen Sie, dass $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ monoton wächst und nach oben beschränkt ist, und bestimmen Sie den Grenzwert der Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Zeigen Sie dazu induktiv, dass $a_n = 2 - \frac{n+2}{2^n}$ ist.

(ii) Sei $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ rekursiv definiert durch

$$b_1 = \frac{1}{2} \quad \text{und} \quad b_n = \frac{b_{n-1}}{1 + n2^n \cdot b_{n-1}}, \; n \geq 2.$$

Bestimmen Sie den Grenzwert von $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$, indem Sie induktiv zeigen, dass $\frac{1}{b_n} = (n-1)2^{n+1} + 2$ ist.

(iii) Seien die nachstehenden Folgen gegeben:

$$c_k := \frac{8k^2 + 5}{7 + 3k^2} \quad \text{und} \quad s_n := \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} c_k.$$

Bestimmen Sie den Grenzwert c von $(c_k)_{k\in\mathbb{N}}$ und zeigen Sie, dass auch die Folge $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen den gleichen Grenzwert konvergiert., Betrachten Sie dazu die Differenz $|s_n - c|$ und schätzen Sie diese geeignet nach oben ab.
Finden Sie eine Folge $(c_k)_{k\in\mathbb{N}}$, sodass $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ aber nicht $(c_k)_{k\in\mathbb{N}}$ konvergiert.

Aufgabe 2

(a) Seien $a, b > 0$ und $a_1 = \sqrt{ab}$ und $b_1 = \frac{1}{2}(a+b)$. Definiere für $n \geq 2$ die Folgenglieder

$$a_n = \sqrt{a_{n-1}b_{n-1}} \quad \text{und} \quad b_n = \frac{1}{2}(a_{n-1} + b_{n-1}).$$

Zeigen Sie, dass stets $a_n \leq b_n$ und dass $(a_n)_n$ monoton wächst und $(b_n)_n$ monoton fällt. Zeigen Sie, dass $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergieren, und zwar mit dem gleichen Grenzwert.

(b) Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ die durch

$$a_1 := \sqrt{2} \quad \text{und} \quad a_{n+1} := \sqrt{2 + a_n}$$

rekursiv definierte Folge. Zeigen Sie, dass die Folge monoton wächst und nach oben beschränkt ist, nämlich $a_n \leq 2$. Berechnen Sie $\lim_{n\to\infty} a_n$.

Aufgabe 3 Seien $a > 0$ und $a_0 > 0$. Sei $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ rekursiv definiert durch

$$b_1 = a_0 \quad \text{und} \quad b_{n+1} = \frac{b_n^2 + 3a}{3b_n^2 + a} b_n$$

(i) Zeigen Sie (induktiv), dass aus $a_0 > \sqrt{a}$ bzw. $a_0 < \sqrt{a}$ auch $b_n > \sqrt{a}$ bzw. $b_n < \sqrt{a}$ folgt, indem Sie nachstehende Gleichheit feststellen:

$$b_{n+1} - \sqrt{a} = \frac{(b_n - \sqrt{a})^3}{3b_n^2 + a}.$$

(ii) Untersuchen Sie $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ auf Monotonie, indem Sie die Differenz $b_{n+1} - b_n$ betrachten und die Fallunterscheidung $a_0 > \sqrt{a}$ bzw. $a_0 < \sqrt{a}$ aus (i) benutzen.

(iii) Folgern Sie, dass $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert und weisen Sie nach, dass der Grenzwert gleich $\sqrt{a}$ ist.

Aufgabe 4

Ist $(a_n)_n$ eine Folge reeller Zahlen, so bezeichnen wir einen Wert a^* als Häufungswert der Folge $(a_n)_n$, wenn eine Teilfolge aus $(a_n)_n$ ausgewählt werden kann, die gegen a^* konvergiert.
Bestimmen Sie zu der Folge

$$a_n := \frac{4^n + (-5)^n}{4^n + 5^n}$$

und zu der rekursiv definierten Folge

$$a_1 := a_2 := 1 \quad \text{und} \quad a_{n+2} := a_{n+1} - a_n, \quad n \geq 1,$$

alle Häufungswerte.