Musterlösungen zu Blatt 9

Kleingruppen zur Service-Veranstaltung Mathematik I für Ingenieure bei Prof. Dr. G. Herbort im WS12/13 – Dipl.-Math. T. Pawlaschyk, 12.12.12

Thema: Lineare Gleichungssysteme und Folgen

Aufgabe 1

(a) Schreiben Sie den Vektor $\begin{pmatrix} 1 + 2x_1 + \frac{3}{2}x_2 \\ 2 - \frac{7}{8}x_1 - 4x_2 \\ -3 - 12x_1 + 3x_2 \\ \frac{1}{2} - 26x_1 - 10x_2 \end{pmatrix}$ als Vektor der Form $\vec{x}_0 + x_1\vec{v}_1 + x_2\vec{v}_2$.

(b) Stellen Sie das folgende Gleichungssystem als erweiterte Matrix $(\mathscr{A}, \vec{b})$ und als Linearkombination von Vektoren der Form $\sum_{j=1}^{n} x_j\vec{v}_j = \vec{b}$ dar.

$$\begin{aligned} 2x_1 - x_2 - x_3 + 3x_4 &= 6 \\ 6x_1 - 2x_2 - 3x_3 &= 0 \\ -4x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 3x_4 &= -5 \end{aligned}$$

(c) Sei $\mathscr{A}$ die Matrix zum Gleichungssystem aus Teil (b). Sei $\mathscr{A}^t$ die zu $\mathscr{A}$ transponierte Matrix, d.h. die Matrix

$$\mathscr{A}^t = \begin{pmatrix} 2 & 6 & -4 \\ -1 & -2 & -2 \\ -1 & -3 & 3 \\ 3 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

Bestimmen Sie jeweils den Rang und den Spaltenraum von $\mathscr{A}$ und von $\mathscr{A}^t$, indem Sie beide Matrizen auf Zeilenstufenform bringen.

Lösungen zu Aufgabe 1

Zu (1):

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} + x_1 \begin{pmatrix} 2 \\ -\frac{7}{8} \\ -12 \\ -26 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ -4 \\ 3 \\ -10 \end{pmatrix}$$

Zu (2): Die erweiterte Matrix zum Gleichungssystem lautet:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -1 & -1 & 3 & 6 \\ 6 & -2 & -3 & 0 & 0 \\ -4 & -2 & 3 & -3 & -5 \end{array}\right)$$

Das Gleichungssystem kann auch geschrieben werden als:

$$x_1 \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ -4 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix} + x_4 \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ -5 \end{pmatrix}$$

Zu (c): Wir bringen die Matrix $\mathscr{A}$ in Zeilenstufenform:

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 & 3 \\ 6 & -2 & -3 & 0 \\ -4 & -2 & 3 & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{3\mathrm{I} - \mathrm{II} \\ 2\mathrm{I} + \mathrm{III}}} \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 & 3 \\ 0 & -1 & 0 & 9 \\ 0 & -4 & 1 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{4\mathrm{II} - \mathrm{III}} \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 & 3 \\ 0 & -1 & 0 & 9 \\ 0 & 0 & -1 & 33 \end{pmatrix}$$

Der Rang der Matrix $\mathscr{A}$ ist somit gleich 3. Nun bringen wir die Matrix $\mathscr{A}^t$ in Zeilenstufenform.

$$\begin{pmatrix} 2 & 6 & -4 \\ -1 & -2 & -2 \\ -1 & -3 & 3 \\ 3 & 0 & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{\mathrm{I} + 2\mathrm{II} \\ \mathrm{I} + 2\mathrm{III} \\ 3\mathrm{I} - 2\mathrm{IV}}} \begin{pmatrix} 2 & 6 & -4 \\ 0 & 2 & -8 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 18 & -6 \end{pmatrix} \xrightarrow{9\mathrm{II} - \mathrm{IV}} \begin{pmatrix} 2 & 6 & -4 \\ 0 & 2 & -8 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -66 \end{pmatrix} \xrightarrow{33\mathrm{III} + \mathrm{IV}} \begin{pmatrix} 2 & 6 & -4 \\ 0 & 2 & -8 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Die Matrix $\mathscr{A}^t$ hat ebenfalls Rang 3. Dies ist wenig verwunderlich, denn stets gilt, dass der Rang einer Matrix mit dem Rang seiner transponierten Matrix übereinstimmt.

Die Zeilenoperationen, die auf die Matrix $\mathscr{A}$ wirken, entsprechen Linearkombinationen der Spaltenvektoren der Matrix $\mathscr{A}^t$. Auf der anderen Seite sind Zeilenoperationen auf $\mathscr{A}^t$ Linearkombinationen der Spaltenvektoren der Matrix $\mathscr{A}$. Folglich ist eine Basis des Spaltenraums von $\mathscr{A}$ gegeben durch

$$\left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ -4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -8 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}.$$

Eine Basis des Spaltenraums von $\mathscr{A}^t$ ist

$$\left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 9 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 33 \end{pmatrix} \right\}.$$

Aufgabe 2 Für welche $s, t \in \mathbb{R}$ ist das folgende Gleichungssystem lösbar?

$$\begin{aligned} 2x_1 + 4x_3 + 3x_4 + 7x_5 &= 1 \\ x_1 + 4x_2 + 2x_3 + 8x_4 + 3x_5 &= 0 \\ 8x_2 + 13x_4 - x_5 &= -1 \\ x_1 - 4x_2 + 2x_3 - 5x_4 + 4x_5 &= s \\ 4x_1 + 8x_2 + 8x_3 + 19x_4 + 13x_5 &= t \end{aligned}$$

Lösungen zu Aufgabe 2 Wir bringen die erweiterte Matrix des Gleichungssystems auf Zeilenstufenform.

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 2 & 0 & 4 & 3 & 7 & 1 \\ 1 & 4 & 2 & 8 & 3 & 0 \\ 0 & 8 & 0 & 13 & -1 & -1 \\ 1 & -4 & 2 & -5 & 4 & s \\ 4 & 8 & 8 & 19 & 13 & t \end{array}\right) \xrightarrow{\substack{\mathrm{I}-2\mathrm{II} \\ \mathrm{I}-2\mathrm{IV} \\ \mathrm{I}-\mathrm{V}}} \left(\begin{array}{ccccc|c} 2 & 0 & 4 & 3 & 7 & 1 \\ 0 & -8 & 0 & -13 & 1 & 1 \\ 0 & 8 & 0 & 13 & -1 & -1 \\ 0 & 8 & 0 & 13 & -1 & 1-2s \\ 0 & -8 & 0 & -13 & 1 & 2-t \end{array}\right)$$

Man sieht nun leicht, dass $s = t = 1$ gelten muss, damit das Gleichungssystem lösbar ist.

Aufgabe 3 Prüfen Sie die nachstehenden Folgen auf Konvergenz und bestimmen Sie ggf. den Grenzwert.

(a) $\frac{1}{n} \cdot \frac{4n^4 + 3n^2 + 2}{3n^3 + 2n^2 + 3n}$ (b) $\frac{(4n-2)(3n+4)^2}{(2n^2+1)(6n^2+2)}$ (c) $\sqrt{n^3+1} - \sqrt{n^2-1}$

(d) $\sqrt{n^2+1} - \sqrt{n^2-1}$ (e) $3^{-2n}\frac{n^5-1}{n^2+4}$ (f) $(-1)^n\frac{n-1}{n+1}$

Lösungen zu Aufgabe 3

Zu (a):

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \cdot \frac{4n^4 + 3n^2 + 2}{3n^3 + 2n^2 + 3n} = \lim_{n\to\infty} \frac{4n^4 + 3n^2 + 2}{3n^4 + 2n^3 + 3n^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{4 + \frac{3}{n^2} + \frac{2}{n^4}}{3 + \frac{2}{n} + \frac{3}{n^2}} = \frac{4}{3}$$

Zu (b):

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(4n-2)(3n+4)^2}{(2n^2+1)(6n^2+2)} = \lim_{n\to\infty} \frac{36n^3 + 78n^2 + 16n - 32}{12n^4 + 10n^2 + 2} = 0$$

Zu (c):
Für $n \geq 2$ sind $n^4 \geq n^3 + 1$ und $n^4 \geq n^2 - 1$ und somit auch $n^2 \geq \sqrt{n^3+1}$ und $n^2 \geq \sqrt{n^2-1}$.
Dann gilt

$$\sqrt{n^3+1} - \sqrt{n^2-1} = \frac{n^3 - n^2 + 2}{\sqrt{n^3+1} + \sqrt{n^2-1}} \geq \frac{n^3 - n^2 + 2}{2n^2} \xrightarrow{n\to\infty} \infty.$$

Zu (d):

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt{n^2+1} - \sqrt{n^2-1} = \lim_{n\to\infty} \frac{2}{\sqrt{n^2+1} + \sqrt{n^2-1}} = 0$$

Zu (e):
Es folgt aus einem Beispiel aus der Vorlesung nach Satz 4.1.4, dass

$$\lim_{n\to\infty} 3^{-2n}\frac{n^5-1}{n^2+4} = 0$$

Zu (f):
Für gerade n erhalten wir

$$(-1)^n\frac{n-1}{n+1} = 1 \cdot \frac{n-1}{n+1}$$

Dies konvergiert gegen 1. Für ungerade n erhalten wir

$$(-1)^n\frac{n-1}{n+1} = (-1) \cdot \frac{n-1}{n+1}$$

Dies konvergiert gegen -1. Die Folge hat also zwei Häufungswerte und kann nicht konvergieren.

Aufgabe 4 Prüfen Sie die nachstehenden Folgen auf Konvergenz.

(a) $\dfrac{n!}{n^n}$ (b) $\left(1-\dfrac{1}{4n^2-4}\right)^{n+1}$ (c) $a_1 = 1,\ a_{n+1} = \sqrt{2a_n}$ (d) $a_1 = a_2 = 1,\ a_{n+1} = a_n - a_{n-1}$

Lösungen zu Aufgabe 4

Zu (a):
Für $n \geq k \geq 1$ gilt: $\frac{k}{n} \leq 1$. Somit:

$$0 \leq \frac{n!}{n^n} = \frac{1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n}{n \cdot n \cdot \ldots \cdot n} \leq \frac{1}{n}.$$

Da $\frac{1}{n}$ gegen 0 konvergiert, konvergiert auch die positive Folge $\frac{n!}{n^n}$ gegen Null.

Zu (b): Es gilt:

$$4n^2 - 4 = 4(n+1)(n-1) \quad \text{und} \quad 1 \geq \left(1 - \frac{1}{4n^2-4}\right)^{n+1}.$$

Mit der Bernoulli-Ungleichung folgt somit:

$$1 \geq \left(1 - \frac{1}{4n^2-4}\right)^{n+1} \geq 1 - \frac{n+1}{4n^2-4} = 1 - \frac{1}{4n-4} \xrightarrow{n\to\infty} 1$$

Zu (c): Es gilt $a_n = 2^{1-2^{1-n}}$. Das zeigt man induktiv nach n. In der Tat ist die Gleichung richtig, wenn $n = 1$. Gilt sie für n, so haben wir

$$a_{n+1} = \sqrt{2a_n} = \sqrt{2 \cdot 2^{1-2^{1-n}}} = \sqrt{2^{2-2^{1-n}}} = \sqrt{(2^{1-2^{-n}})^2} = 2^{1-2^{-n}} = 2^{1-2^{1-(n+1)}}$$

Es folgt $\lim_{n\to\infty} a_n = 2$.

Zu (d): Es gilt

$$a_{n+7} = a_{n+6} - a_{n+5} = (a_{n+5} - a_{n+4}) - a_{n+5} = -a_{n+4}$$
$$a_{n+4} = a_{n+3} - a_{n+2} = (a_{n+2} - a_{n+1}) - a_{n+2} = -a_{n+1}$$

Also ist $a_{n+7} = a_{n+1}$ und damit $(a_{6k+1})_k$ konstant gleich $a_1 = 1$. Aber es ist auch

$$a_{n+3} = a_{n+2} - a_{n+1} = a_{n+1} - a_n - a_{n+1} = -a_n$$

Mit $a_3 = a_2 - a_1 = 0$ folgt $a_{3k} = 0$ für alle k. Unsere Folge hat damit 2 Teilfolgen mit unterschiedlichen Grenzwerten, konvergiert also nicht.