Musterlösungen zu Blatt 8

Kleingruppen zur Service-Veranstaltung Mathematik I für Ingenieure bei Prof. Dr. G. Herbort
im WS12/13 – Dipl.-Math. T. Pawlaschyk, 05.12.12

Thema: Lineare Gleichungssysteme

Aufgabe 1

Bringen Sie die folgenden Matrizen auf Zeilenstufenform und geben Sie jeweils den Rang der Matrix an.

$$\text{(a) } A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 & 3 \\ 3 & -2 & -1 & 4 \\ 2 & 4 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{(b) } B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -6 & 2 \\ 0 & 1 & -3 & 0 \\ 1 & -2 & 3 & 1 \\ 4 & 0 & 8 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{(c) } C = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -4 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ -6 & 7 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Lösungen zu Aufgabe 1

Zu (a):

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 & 3 \\ 3 & -2 & -1 & 4 \\ 2 & 4 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{3\mathrm{I}-\mathrm{II} \\ 2\mathrm{I}-\mathrm{III}}} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 & 3 \\ 0 & -4 & 7 & 5 \\ 0 & -8 & 3 & 5 \end{pmatrix} \xrightarrow{2\mathrm{II}-\mathrm{III}} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 & 3 \\ 0 & -4 & 7 & 5 \\ 0 & 0 & 11 & 5 \end{pmatrix}$$

Der Rang von A ist also gleich 3.

Zu (b):

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & -6 & 2 \\ 0 & 1 & -3 & 0 \\ 1 & -2 & 3 & 1 \\ 4 & 0 & 8 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{2\mathrm{I}-\mathrm{IV} \\ \mathrm{I}-2\mathrm{III}}} \begin{pmatrix} 2 & 0 & -6 & 2 \\ 0 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 4 & -12 & 0 \\ 0 & 0 & -20 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{4\mathrm{II}-\mathrm{III}} \begin{pmatrix} 2 & 0 & -6 & 2 \\ 0 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -20 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{\mathrm{III}\leftrightarrow\mathrm{IV}} \begin{pmatrix} 2 & 0 & -6 & 2 \\ 0 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -20 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Der Rang von B ist also gleich 3.

Zu (c): Der Rang von C ist gleich 4, denn:

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -4 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ -6 & 7 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{4\mathrm{I}+3\mathrm{II} \\ 2\mathrm{I}+\mathrm{III} \\ I-3\mathrm{IV}}} \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 6 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 7 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & -9 & -3 & -6 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{7\mathrm{II}-6\mathrm{III} \\ 3\mathrm{II}+2\mathrm{IV}}} \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 6 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & -6 & 0 & 16 \\ 0 & 0 & -6 & -12 & 14 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\mathrm{III}-\mathrm{IV}} \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 6 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & -6 & 0 & 16 \\ 0 & 0 & 0 & 12 & 2 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 2

(a) Für welches $a \in \mathbb{R}$ hat das lineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned} 4x_1 + 5x_2 + 2x_3 &= 5 \\ 3x_1 + 6x_2 + 8x_3 &= -1 \\ 7x_1 + 2x_2 - 16x_3 &= a \end{aligned}$$

eine Lösung? Wie sehen die Lösungen aus?

b) Zeigen Sie, dass ein Vektor $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$ genau dann Linearkombination von $\vec{u}_1 = \begin{pmatrix} -5 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix}$, $\vec{u}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 12 \end{pmatrix}$ und $\vec{u}_3 = \begin{pmatrix} 6 \\ 12 \\ -48 \end{pmatrix}$ ist, wenn $2b_1 - 5b_2 - b_3 = 0$ gilt.

Lösungen zu Aufgabe 3

Zu (a): Wir betrachten die erweiterte Matrix $(\mathscr{A}|\vec{b})$ und bringen sie auf Zeilenstufenform:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 5 & 2 & 5 \\ 3 & 6 & 8 & -1 \\ 7 & 2 & -16 & a \end{array}\right) \xrightarrow{\substack{3\mathrm{I}-4\mathrm{II} \\ 7\mathrm{I}-4\mathrm{III}}} \left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 5 & 2 & 5 \\ 0 & -9 & -26 & 19 \\ 0 & 27 & 78 & 35-4a \end{array}\right) \xrightarrow{3\mathrm{II}+\mathrm{III}} \left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 5 & 2 & 5 \\ 0 & -9 & -26 & 19 \\ 0 & 0 & 0 & 92-4a \end{array}\right)$$

Lösungen kann es folglich nur geben, falls $a = 23$.

Die zweite Zeile liefert $x_2 = -\frac{1}{9}(19 + 26x_3)$. Dies setzen wir in die erste Zeile ein:

$$\begin{aligned} & 4x_1 - \frac{5}{9}(19 + 26x_3) + 2x_3 = 5 \\ \Leftrightarrow\quad & 4x_1 - \frac{130}{9}x_3 + \frac{18}{9}x_3 = \frac{45}{9} + \frac{95}{9} \\ \Leftrightarrow\quad & 4x_1 - \frac{112}{9}x_3 = \frac{140}{9} \\ \Leftrightarrow\quad & x_1 = \frac{35}{9} + \frac{28}{9}x_3 \end{aligned}$$

Lösungen sind also $\vec{x} = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 35 \\ -19 \\ 0 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} 28 \\ -26 \\ 9 \end{pmatrix}$. Die Lösungsmenge $\mathscr{L}$ ist demnach

$$\mathscr{L} = \left\{ \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 35 \\ -19 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 28 \\ -26 \\ 9 \end{pmatrix} \mid t \in \mathbb{R} \right\}.$$

Zu (b): Genau dann ist $\vec{b}$ Linearkombination der gegebenen Vektoren $\vec{u}_1, \vec{u}_2$ und $\vec{u}_3$, wenn das LGS

$$\begin{pmatrix} -5 & 1 & 6 \\ -3 & -2 & 12 \\ 5 & 12 & -48 \end{pmatrix} \cdot \vec{x} = \vec{b}$$

lösbar ist. Mit Zeilenstufenverfahren können wir die erweiterte Matrix z.B. in

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -5 & 1 & 6 & b_1 \\ 0 & -13 & 42 & 5b_2 - 3b_1 \\ 0 & 0 & 0 & 2b_1 - 5b_2 + b_3 \end{array}\right)$$

überführen, woraus alles folgt.

Aufgabe 3

Bestimmen Sie die Lösungsmenge $\mathscr{L}$ des folgenden Gleichungssystems.

$$\begin{aligned} 2x_1 - 5x_2 + 6x_3 - 6x_4 &= -3 \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 + x_4 &= 5 \\ -6x_1 - x_2 + 2x_4 &= -5 \\ 4x_1 + 6x_2 - 2x_3 + 2x_4 &= 10 \end{aligned}$$

Lösungen zu Aufgabe 3 Wir betrachten die Matrix des Gleichungssystems und es überführen in Zeilenstufenform.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -5 & 6 & -6 & -3 \\ 2 & 3 & -1 & 1 & 5 \\ -6 & -1 & 0 & 2 & -5 \\ 4 & 6 & -2 & 2 & 10 \end{array}\right) \xrightarrow{\substack{\mathrm{I}-\mathrm{II} \\ 3\mathrm{I}-\mathrm{III} \\ 2\mathrm{I}-\mathrm{IV}}} \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -5 & 6 & -6 & -3 \\ 0 & -8 & 7 & -7 & -8 \\ 0 & -16 & 18 & -16 & -14 \\ 0 & -16 & 14 & -14 & -16 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{\substack{2\mathrm{II}-2\mathrm{III} \\ 2\mathrm{II}-\mathrm{IV}}} \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -5 & 6 & -6 & -3 \\ 0 & -8 & 7 & -7 & -8 \\ 0 & 0 & -4 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Wir lösen von unten nach oben auf und erhalten

$$x_4 = -1 + 2x_3, \quad x_2 = \frac{15}{8} - \frac{7}{8}x_3 \quad \text{und} \quad x_1 = \frac{3}{16} + \frac{13}{16}x_3.$$

Die Lösungsmenge ist also

$$\mathscr{L} = \left\{ \begin{pmatrix} 3 \\ 30 \\ 0 \\ -16 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 13 \\ -14 \\ 16 \\ 32 \end{pmatrix} \;\middle|\; t \in \mathbb{R} \right\}.$$

Aufgabe 4

Für welches $t \in \mathbb{R}$ hat das lineare Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 & 1 & -8 \\ 2 & -2 & 4 & 7 & 4 \\ 4 & -7 & 2 & 11 & 6 \\ 4 & -4 & 7 & 12 & 6 \\ 20 & -21 & 29 & 51 & 12 \end{pmatrix} \cdot \vec{x} = \begin{pmatrix} 12 \\ -2 \\ -11 \\ -1 \\ t \end{pmatrix}$$

eine Lösung. Was ist die Lösungsmenge $\mathscr{L}$?

Lösungen zu Aufgabe 4

An der erweiterten Matrix

$$\left(\mathscr{A} \mid \vec{b}\right) = \left(\begin{array}{ccccc|c} 2 & 0 & 4 & 1 & -8 & 12 \\ 2 & -2 & 4 & 7 & 4 & -2 \\ 4 & -7 & 2 & 11 & 6 & -11 \\ 4 & -4 & 7 & 12 & 6 & -1 \\ 20 & -21 & 29 & 51 & 12 & t \end{array}\right) \xrightarrow{\substack{\mathrm{II}-\mathrm{I} \\ \mathrm{III}-2\mathrm{I} \\ \mathrm{IV}-2\mathrm{I} \\ \mathrm{V}-10\mathrm{I}}} \left(\begin{array}{ccccc|c} 2 & 0 & 4 & 1 & -8 & 12 \\ 0 & -2 & 0 & 6 & 12 & -14 \\ 0 & -7 & -6 & 9 & 22 & -35 \\ 0 & -4 & -1 & 10 & 22 & -25 \\ 0 & -21 & -11 & 41 & 92 & -120+t \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{\substack{\mathrm{III}-\frac{7}{2}\mathrm{II} \\ \mathrm{IV}-2\mathrm{II} \\ \mathrm{V}-3\mathrm{III}}} \left(\begin{array}{ccccc|c} 2 & 0 & 4 & 1 & -8 & 12 \\ 0 & -2 & 0 & 6 & 12 & -14 \\ 0 & 0 & -6 & -12 & -20 & 14 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 7 & 14 & 26 & -15+t \end{array}\right) \xrightarrow{\mathrm{III}\leftrightarrow\mathrm{IV}} \left(\begin{array}{ccccc|c} 2 & 0 & 4 & 1 & -8 & 12 \\ 0 & -2 & 0 & 6 & 12 & -14 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & -6 & -12 & -20 & 14 \\ 0 & 0 & 7 & 14 & 26 & -15+t \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{\substack{\mathrm{IV}-6\mathrm{III} \\ \mathrm{V}+7\mathrm{III}}} \left(\begin{array}{ccccc|c} 2 & 0 & 4 & 1 & -8 & 12 \\ 0 & -2 & 0 & 6 & 12 & -14 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -8 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 12 & 6+t \end{array}\right) \xrightarrow{\frac{3}{2}\mathrm{IV}+\mathrm{V}} \left(\begin{array}{ccccc|c} 2 & 0 & 4 & 1 & -8 & 12 \\ 0 & -2 & 0 & 6 & 12 & -14 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -8 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & t \end{array}\right)$$

Das lineare Gleichungssystem ist also genau dann lösbar, wenn $t = 0$ ist.

Zur Berechnung der Lösungsmenge $\mathscr{L}$ arbeiten wir mit dem linearen Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 & -8 \\ 0 & -2 & 0 & 12 \\ 0 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 \\ -14 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix} - x_4 \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Wir erhalten $x_5 = 1/2$, und $x_3 = -(3 + 2x_4) - 2x_5 = -4 - 2x_4$. Weiter wird

$$x_2 = -\frac{1}{2}(-14 - 6x_4 - 12x_5) = 7 + 3x_4 + 3 = 10 + 3x_4$$

und

$$x_1 = \frac{1}{2}(12 - x_4 - 4x_3 + 8x_5) = 6 - \frac{1}{2}x_4 - 2x_3 + 2 = 6 - \frac{1}{2}x_4 - 2(-4 - 2x_4) + 2 = 16 + \frac{7}{2}x_4$$

Also ist $\vec{x} = \vec{x}_0 + x_4\vec{v}$, mit

$$\vec{x}_0 = \begin{pmatrix} 16 \\ 10 \\ -4 \\ 0 \\ 1/2 \end{pmatrix}, \qquad \vec{v} = \begin{pmatrix} \frac{7}{2} \\ 3 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$