Musterlösungen zu Blatt 7

Kleingruppen zur Service-Veranstaltung Mathematik I für Ingenieure bei Prof. Dr. G. Herbort im WS12/13 – Dipl.-Math. T. Pawlaschyk, 28.11.12

Thema: Vektor- und Matrizenrechnung in $\mathbb{R}^n$

Aufgabe 1

Seien folgende Vektoren gegeben:

$$\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{v}_3 = \begin{pmatrix} -7 \\ 1 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{v}_4 = \begin{pmatrix} -13 \\ 0 \\ 13 \\ 0 \end{pmatrix}$$

und

$$\vec{w}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{w}_2 = \begin{pmatrix} 10 \\ -1 \\ -7 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{w}_3 = \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \\ -9 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Zeigen Sie, dass $\mathrm{Lin}(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3, \vec{v}_4) = \mathrm{Lin}(\vec{w}_1, \vec{w}_2, \vec{w}_3)$.

Lösungen zu Aufgabe 1

Da $\mathrm{Lin}(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3, \vec{v}_4) = \mathrm{Lin}(\vec{w}_1, \vec{w}_2, \vec{w}_3)$ gezeigt werden soll, überprüfen wir zunächst die Vektoren $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_4$ auf lineare Abhängigkeit, d.h. $\sum_{k=1}^{3} s_k \vec{v}_k = \vec{v}_4$. Als Lösung erhalten wir $s_1 = 1$, $s_2 = -1$ und $s_3 = 2$.
Auf ähnliche Weise zeigen wir, dass alle $\vec{w}_j$, $j = 1, 2, 3$, geschrieben werden können als Linearkombination der $\vec{v}_k$, $k = 1, 2, 3, 4$, d.h. $w_j = \sum_{k=1}^{4} s_{k,j} \vec{v}_j$, $j = 1, 2, 3$. Als Lösungen erhalten wir:

$$\vec{w}_1 = \vec{v}_1 - \vec{v}_2, \quad \vec{w}_2 = \vec{v}_2 - \vec{v}_3 \quad \text{und} \quad \vec{w}_3 = \vec{v}_3 - \vec{v}_4.$$

D.h. $\vec{w}_j \in \mathrm{Lin}(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3, \vec{v}_4)$ für $j = 1, 2, 3$. Umgekehrt sehen wir, dass jedes $\vec{v}_k$, $k = 1, 2, 3, 4$, als Linearkombination der $\vec{w}_j$, $j = 1, 2, 3$, geschrieben werden kann. D.h. $\vec{v}_k \in \mathrm{Lin}(\vec{w}_1, \vec{w}_2, \vec{w}_3)$ für $k = 1, 2, 3, 4$.

Aufgabe 2

(a) Sei $V = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^4 \mid x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 5x_4 = 0\}$. Zeigen Sie, dass jeder Vektor aus V eine Linearkombination der Vektoren $\vec{u}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\vec{u}_2 = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ und $\vec{u}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ ist.

Ist $V = \mathrm{Lin}(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3)$?

(b) Sei $U = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^4 : 3x_1 - x_2 + 4x_3 + 5x_4 = 0,\ 2x_1 - 7x_2 + 9x_3 + x_4 = 0\}$ ein Unterraum in $\mathbb{R}^4$. Bestimmen Sie eine Basis für U und geben Sie die Dimension von U an.

Lösungen zu Aufgabe 2

Zu (a): Sei $\vec{x} \in V$. Dann hat $\vec{x}$ die Form

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} -2x_2 - 3x_3 + 5x_4 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} x_2 + \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} x_3 + \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} x_4.$$

Offensichtlich bilden die Vektoren $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\vec{v}_3 = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ eine Basis von V, da sie linear unabhängig sind und ganz V erzeugen. Man sieht leicht (oder löst ein Gleichungssystem), dass

$$\begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ sind.}$$

Ferner gilt $\begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$. Somit können alle Vektoren aus V mit Hilfe der Vektoren $\vec{u}_j$, $j = 1, 2, 3$ ausgedrückt werden. Da jeweils $\vec{u}_1$, $\vec{u}_2$, $\vec{u}_3$ und $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$, $\vec{v}_3$ linear unabhängig sind und U in $\mathrm{Lin}(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3)$ liegt, müssen die Mengen aus Dimensionsgründen gleich sein.

Zu (b): Wir setzen die zweite Bedingung $x_4 = -2x_1 + 7x_2 - 9x_3$ in die erste Bedingung $3x_1 - x_2 + 4x_3 + 5x_4 = 0$ ein und erhalten:

$$0 = 3x_1 - x_2 + 4x_3 + 5(-2x_1 + 7x_2 - 9x_3) = 3x_1 - x_2 + 4x_3 - 10x_1 + 35x_2 - 45x_3 = -7x_1 + 34x_2 - 41x_3$$

Die erste Bedingung erweitern wir mit 7 und setzen das obere Ergebnis ein:

$$7x_4 = -14x_1 + 49x_2 - 63x_3 = 2(-34x_2 + 41x_3) + 49x_2 - 63x_3 = -19x_2 + 19x_3.$$

Da U ein Unterraum ist, ist mit $\vec{x} \in U$ auch $7\vec{x}$ in U. D.h.

$$7\vec{x} = \begin{pmatrix} 7x_1 \\ 7x_2 \\ 7x_3 \\ 7x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 34x_2 - 41x_3 \\ 7x_2 \\ 7x_3 \\ -19x_2 + 19x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 34 \\ 7 \\ 0 \\ -19 \end{pmatrix} x_2 + \begin{pmatrix} -41 \\ 0 \\ 7 \\ 19 \end{pmatrix} x_3.$$

Die Vektoren $\begin{pmatrix} 34 \\ 7 \\ 0 \\ -19 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} -41 \\ 0 \\ 7 \\ 19 \end{pmatrix}$ erzeugen also U und sind offensichtlich linear unabhängig. Die Dimension von U ist daher gleich zwei.

Aufgabe 3

Berechnen Sie folgende Produkte jeweils für $\vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$ und $\vec{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix}$:

$$\text{(a)} \begin{pmatrix} 1 & -4 & 2 & 7 \\ 2 & 3 & 4 & -1 \end{pmatrix} \cdot \vec{x} \qquad \text{(b)} \begin{pmatrix} 3 & -14 & 2 & 13 \end{pmatrix} \cdot \vec{x}$$

und

$$\text{(c)}\quad \begin{pmatrix} 4 & 2 & 0 & -9 \\ 3 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \vec{x} \qquad \text{(d)}\quad \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 2 \\ -3 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \cdot \vec{x}$$

Lösungen zu Aufgabe 3

Zu (a):

$$\begin{pmatrix} 1 & -4 & 2 & 7 \\ 2 & 3 & 4 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\cdot 2 \ + \ (-4)\cdot 1 \ + \ 2\cdot(-1) \ + \ 7\cdot(-2) \\ 2\cdot 2 \ + \ 3\cdot 1 \ + \ 4\cdot(-1) \ + \ (-1)\cdot(-2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -18 \\ 5 \end{pmatrix}$$

und

$$\begin{pmatrix} 1 & -4 & 2 & 7 \\ 2 & 3 & 4 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\cdot(-1) \ + \ (-4)\cdot 2 \ + \ 2\cdot(-1) \ + \ 7\cdot(-3) \\ 2\cdot(-1) \ + \ 3\cdot 2 \ + \ 4\cdot(-1) \ + \ (-1)\cdot(-3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -30 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Zu (b):

$$\begin{pmatrix} 3 & -14 & 2 & 13 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} = 3\cdot 2 \ + \ (-14)\cdot 1 \ + \ 2\cdot(-1) \ + \ 13\cdot(-2) = -36$$

und

$$\begin{pmatrix} 3 & -14 & 2 & 13 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix} = 3\cdot(-1) \ + \ (-14)\cdot 2 \ + \ 2\cdot(-1) \ + \ 13\cdot 3 = 6$$

Zu (c):

$$\begin{pmatrix} 4 & 2 & 0 & -9 \\ 3 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4\cdot 2 \ + \ 2\cdot 1 \ + \ 0\cdot(-1) \ + \ (-9)\cdot(-2) \\ 3\cdot 2 \ + \ 0\cdot 1 \ + \ (-1)\cdot(-1) \ + \ (-1)\cdot(-2) \\ 0\cdot 2 \ + \ 2\cdot 1 \ + \ 1\cdot(-1) \ + \ (-1)\cdot(-2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 28 \\ 9 \\ 3 \end{pmatrix}$$

und

$$\begin{pmatrix} 4 & 2 & 0 & -9 \\ 3 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4\cdot(-1) \ + \ 2\cdot 2 \ + \ 0\cdot(-1) \ + \ (-9)\cdot(-3) \\ 3\cdot(-1) \ + \ 0\cdot 2 \ + \ (-1)\cdot(-1) \ + \ (-1)\cdot(-3) \\ 0\cdot(-1) \ + \ 2\cdot 2 \ + \ 1\cdot(-1) \ + \ (-1)\cdot(-3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 27 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix}$$

Zu (d):

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 2 \\ -3 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\cdot 2 \ + \ (-1)\cdot 1 \ + \ (-1)\cdot(-1) \ + \ 1\cdot(-2) \\ 0\cdot 2 \ + \ 1\cdot 1 \ + \ 2\cdot(-1) \ + \ (-1)\cdot(-2) \\ (-1)\cdot 2 \ + \ 0\cdot 1 \ + \ 0\cdot(-1) \ + \ 2\cdot(-2) \\ (-3)\cdot 2 \ + \ 1\cdot 1 \ + \ 2\cdot(-1) \ + \ 0\cdot(-2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -6 \\ -7 \end{pmatrix}$$

und

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 2 \\ -3 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\cdot(-1) \ + \ (-1)\cdot 2 \ + \ (-1)\cdot(-1) \ + \ 1\cdot(-3) \\ 0\cdot(-1) \ + \ 1\cdot 2 \ + \ 2\cdot(-1) \ + \ (-1)\cdot(-3) \\ (-1)\cdot(-1) \ + \ 0\cdot 2 \ + \ 0\cdot(-1) \ + \ 2\cdot(-3) \\ (-3)\cdot(-1) \ + \ 1\cdot 2 \ + \ 2\cdot(-1) \ + \ 0\cdot(-3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ 3 \\ -5 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 4

(a) Bestimmen Sie den Rang der Matrix

$$\mathscr{A} = \begin{pmatrix} 20 & 12 & 18 & 8 \\ 2 & -2 & 3 & 0 \\ 31 & 13 & 30 & 11 \end{pmatrix},$$

indem Sie eine Basis des Spaltenraums von $\mathscr{A}$ angeben.

(b) Geben Sie eine Basis des Nullraumes $N_{\mathscr{A}} := \{\vec{x} \in \mathbb{R}^4 \mid \mathscr{A} \cdot \vec{x} = 0\}$ an.

(c) Sei $\vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 15 \\ 29 \end{pmatrix}$. Bestimmen Sie die Menge $\mathscr{L}$ aller Vektoren $\vec{x} \in \mathbb{R}^4$, für die $\mathscr{A} \cdot \vec{x} = \vec{b}$ gilt.

Lösungen zu Aufgabe 4

Zu (a):

Es ist klar, dass $S_1(\mathscr{A}) = \begin{pmatrix} 20 \\ 2 \\ 31 \end{pmatrix}$ und $S_2(\mathscr{A}) = \begin{pmatrix} 12 \\ -2 \\ 13 \end{pmatrix}$ linear unabhängig sind. Es ist

$$\begin{pmatrix} 20 \\ 2 \\ 31 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 12 \\ -2 \\ 13 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\cdot 13 - 31\cdot(-2) \\ 31\cdot 12 - 20\cdot 13 \\ 20\cdot(-2) - 2\cdot 12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 88 \\ 112 \\ -64 \end{pmatrix}.$$

Die Vektoren $\begin{pmatrix} 20 \\ 2 \\ 31 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 12 \\ -2 \\ 13 \end{pmatrix}$ und $S_3(\mathscr{A}) = \begin{pmatrix} 18 \\ 3 \\ 30 \end{pmatrix}$ sind linear abhängig, denn

$$\langle \begin{pmatrix} 88 \\ 112 \\ -64 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 18 \\ 3 \\ 30 \end{pmatrix} \rangle = 88\cdot 18 + 336 - 64\cdot 30 = 1584 + 336 - 1920 = 0.$$

Auch sind die Vektoren $\begin{pmatrix} 20 \\ 2 \\ 31 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 12 \\ -2 \\ 13 \end{pmatrix}$ und $S_4(\mathscr{A}) = \begin{pmatrix} 8 \\ 0 \\ 11 \end{pmatrix}$ linear abhängig, denn

$$\langle \begin{pmatrix} 88 \\ 112 \\ -64 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 8 \\ 0 \\ 11 \end{pmatrix} \rangle = 704 - 704 = 0$$

Damit drücken die Spaltenvektoren $\begin{pmatrix} 20 \\ 2 \\ 31 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 12 \\ -2 \\ 13 \end{pmatrix}$ die restlichen Spaltenvektoren der Matrix $\mathscr{A}$ aus. Sie bilden somit eine Basis des Spaltenraumes, der die Dimension 2 hat. Der Spaltenrang ist also 2.

Zu (b): Es gilt $\frac{9}{8}S_1(\mathscr{A}) - \frac{3}{8}S_2(\mathscr{A}) = S_3(\mathscr{A})$ und weiter $\frac{1}{4}S_1(\mathscr{A}) + \frac{1}{4}S_2(\mathscr{A}) = S_4(\mathscr{A})$.
Ist $\vec{x} \in N_{\mathscr{A}}$, so haben wir

$$\begin{aligned} S_1(\mathscr{A})x_1 + S_2(\mathscr{A})x_2 + S_3(\mathscr{A})x_3 + S_4(\mathscr{A})x_4 &= S_1(\mathscr{A})x_1 + S_2(\mathscr{A})x_2 \\ &\quad + x_3(\frac{9}{8}S_1(\mathscr{A}) - \frac{3}{8}S_2(\mathscr{A})) + x_4(\frac{1}{4}S_1(\mathscr{A}) + \frac{1}{4}S_2(\mathscr{A})) \\ &= (x_1 + \frac{9}{8}x_3 + \frac{1}{4}x_4)S_1(\mathscr{A}) + (x_2 - \frac{3}{8}x_3 + \frac{1}{4}x_4)S_2(\mathscr{A}) \\ &= \vec{0} \end{aligned}$$

Das bedeutet aber

$$x_1 = -\frac{9}{8}x_3 - \frac{1}{4}x_4 \ , \quad x_2 = \frac{3}{8}x_3 - \frac{1}{4}x_4$$

also

$$\vec{x} = \underbrace{\begin{pmatrix} -\frac{9}{8} \\ \frac{3}{8} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{=:\vec{b}_1} x_3 + \underbrace{\begin{pmatrix} -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{=:\vec{b}_2} x_4$$

und $N_{\mathscr{A}} = \mathrm{Lin}(\vec{b}_1, \vec{b}_2)$.

Zu (c): Es genügt, den Ansatz $\mathscr{A} \cdot \begin{pmatrix} t \\ s \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 15 \\ 29 \end{pmatrix}$ zu machen, da die Spaltenvektoren $S_3(\mathscr{A})$ und $S_4(\mathscr{A})$ nach Teil (a) von den ersten beiden, also $S_1(\mathscr{A})$ und $S_2(\mathscr{A})$, linear abhängig sind. Wir finden $t = \frac{23}{8}, s = -\frac{37}{8}$. Ist dann $\vec{x}$ irgendein Vektor mit $\mathscr{A} \cdot \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 15 \\ 29 \end{pmatrix}$, so ist $\vec{x} - \frac{1}{8}\begin{pmatrix} 23 \\ -37 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \in N_{\mathscr{A}}$.

Also ist $\mathscr{L} = \{\frac{1}{8}\begin{pmatrix} 23 \\ -37 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha_1\vec{b}_1 + \alpha_2\vec{b}_2 \mid \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}\}$. Dabei sind $\vec{b}_1$ und $\vec{b}_2$ wie im Teil (b) definiert.