BERGISCHE UNIVERSITÄT WUPPERTAL

die studien eingangs phase

GEFÖRDERT VOM Bundesministerium für Bildung und Forschung

Übungsaufgaben, Blatt 7

Kleingruppen zur Service-Veranstaltung Mathematik I für Ingenieure bei Prof. Dr. G. Herbort im WS12/13 – Dipl.-Math. T. Pawlaschyk, 27.11.12

Thema: Vektor- und Matrizenrechnung in $\mathbb{R}^n$

Aufgabe 1

Seien folgende Vektoren gegeben:

$$\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{v}_3 = \begin{pmatrix} -7 \\ 1 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{v}_4 = \begin{pmatrix} -13 \\ 0 \\ 13 \\ 0 \end{pmatrix}$$

und

$$\vec{w}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{w}_2 = \begin{pmatrix} 10 \\ -1 \\ -7 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{w}_3 = \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \\ -9 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Zeigen Sie, dass $\mathrm{Lin}(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3, \vec{v}_4) = \mathrm{Lin}(\vec{w}_1, \vec{w}_2, \vec{w}_3)$.

Aufgabe 2

(a) Sei $V = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^4 \mid x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 5x_4 = 0\}$. Zeigen Sie, dass jeder Vektor aus V eine Linearkombination der Vektoren $\vec{u}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\vec{u}_2 = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ und $\vec{u}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ ist.

Ist $V = \mathrm{Lin}(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3)$?

(b) Sei $U := \{\vec{x} \in \mathbb{R}^4 : 3x_1 - x_2 + 4x_3 + 5x_4 = 0,\ 2x_1 - 7x_2 + 9x_3 + x_4 = 0\}$ ein Unterraum in $\mathbb{R}^4$. Bestimmen Sie eine Basis für U und geben Sie die Dimension von U an.

Aufgabe 3

Berechnen Sie folgende Produkte jeweils für $\vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$ und $\vec{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix}$:

$$\text{(a)} \begin{pmatrix} 1 & -4 & 2 & 7 \\ 2 & 3 & 4 & -1 \end{pmatrix} \cdot \vec{x} \qquad \text{(b)} \begin{pmatrix} 3 & -14 & 2 & 13 \end{pmatrix} \cdot \vec{x}$$

und

$$\text{(c)} \begin{pmatrix} 4 & 2 & 0 & -9 \\ 3 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \vec{x} \qquad \text{(d)} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 2 \\ -3 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \cdot \vec{x}$$

Aufgabe 4

(a) Bestimmen Sie den Rang der Matrix

$$\mathscr{A} = \begin{pmatrix} 20 & 12 & 18 & 8 \\ 2 & -2 & 3 & 0 \\ 31 & 13 & 30 & 11 \end{pmatrix},$$

indem Sie eine Basis des Spaltenraums von $\mathscr{A}$ angeben.

(b) Geben Sie eine Basis des Nullraumes $N_{\mathscr{A}} := \{\vec{x} \in \mathbb{R}^4 \mid \mathcal{A} \cdot \vec{x} = 0\}$ an.

(c) Sei $\vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 15 \\ 29 \end{pmatrix}$. Bestimmen Sie die Menge $\mathscr{L}$ aller Vektoren $\vec{x} \in \mathbb{R}^4$, für die $\mathscr{A} \cdot \vec{x} = \vec{b}$ gilt.