BERGISCHE UNIVERSITÄT WUPPERTAL
die studien eingangs phase
GEFÖRDERT VOM Bundesministerium für Bildung und Forschung

Musterlösungen zu Blatt 6

Kleingruppen zur Service-Veranstaltung Mathematik I für Ingenieure bei Prof. Dr. G. Herbort im WS12/13 – Dipl.-Math. T. Pawlaschyk, 18.11.12

Thema: Vektorrechnung in $\mathbb{R}^3$

Aufgabe 1

(a) Berechnen Sie

$$\begin{pmatrix}3\\5\\-2\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}7\\-4\\5\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}-4\\6\\1\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}9\\6\\8\end{pmatrix},\quad \text{und}\quad \begin{pmatrix}11\\-5\\7\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}8\\-2\\-11\end{pmatrix}$$

(b) Welchen Winkel bilden die unter (a) berechneten Vektorprodukte mit $\begin{pmatrix}8\\-3\\-7\end{pmatrix}$?

Lösungen zu Aufgabe 1

Es gilt

$$\vec{w}_1 := \begin{pmatrix}3\\5\\-2\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}7\\-4\\5\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}5\cdot 5-(-2)\cdot(-4)\\(-2)\cdot 7-3\cdot 5\\3\cdot(-4)-5\cdot 7\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}17\\-29\\-47\end{pmatrix},$$

$$\vec{w}_2 = \begin{pmatrix}-4\\6\\1\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}9\\6\\8\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}6\cdot 8-1\cdot 6\\1\cdot 9-(-4)\cdot 8\\(-4)\cdot 6-6\cdot 9\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}42\\41\\-78\end{pmatrix}$$

und

$$\vec{w}_3 = \begin{pmatrix}11\\-5\\7\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}8\\-2\\-11\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}(-5)\cdot(-11)-7\cdot(-2)\\7\cdot 8-11\cdot(-11)\\11\cdot(-2)-(-5)\cdot 8\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}69\\177\\18\end{pmatrix}$$

Die Winkel zwischen α_j und $\vec{w}_0 := \begin{pmatrix}8\\-3\\-7\end{pmatrix}$ werden so berechnet:

$$\begin{aligned}
\cos\alpha_1 &= \frac{\langle\vec{w}_1,\vec{w}_0\rangle}{\|\vec{w}_1\|\cdot\|\vec{w}_0\|} = \frac{552}{\sqrt{3339}\sqrt{122}} \approx 0.8648, \qquad \alpha_1 \approx 30^\circ 8',\\
\cos\alpha_2 &= \frac{\langle\vec{w}_2,\vec{w}_0\rangle}{\|\vec{w}_2\|\cdot\|\vec{w}_0\|} = \frac{659}{\sqrt{9529}\sqrt{122}} \approx 0.611197, \qquad \alpha_2 \approx 52^\circ 32',\\
\cos\alpha_3 &= \frac{\langle\vec{w}_3,\vec{w}_0\rangle}{\|\vec{w}_3\|\cdot\|\vec{w}_0\|} = \frac{-105}{\sqrt{36414}\sqrt{122}} \approx -0.0498, \qquad \alpha_3 \approx 92^\circ 51'.
\end{aligned}$$

Aufgabe 2

(a) Prüfen Sie mit Hilfe des Vektorprodukts, ob die folgenden Vektoren linear unabhängig sind.

$$\text{(i)}\ \begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \text{(ii)}\ \begin{pmatrix}11\\-3\\4\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-3\\-1\\-12\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}16\\-8\\-16\end{pmatrix}$$

(b) Finden Sie eine Zahl s, so dass die Vektoren

$$\begin{pmatrix}2\\1\\-2\end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix}-3\\2\\4\end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \begin{pmatrix}3\\s\\-2\end{pmatrix}$$

linear abhängig werden.

Lösungen zu Aufgabe 2

Laut Vorlesung sind drei Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ genau dann linear unabhängig, wenn

$$\langle \vec{a} \times \vec{b}, \vec{c} \rangle \neq 0.$$

Zu (a), Teil (i)

$$\langle \begin{pmatrix}(-1)\cdot 1 - 1\cdot 1\\1\cdot 1 - 1\cdot 1\\1\cdot 1 - (-1)\cdot 1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix} \rangle = \langle \begin{pmatrix}-2\\0\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix} \rangle = 2 + 2 = 4 \neq 0.$$

Die Vektoren sind also linear unabhängig.

Zu Teil (ii)

$$\langle \begin{pmatrix}(-3)\cdot(-12) - 4\cdot(-1)\\4\cdot(-3) - 11\cdot(-12)\\11\cdot(-1) - (-3)\cdot(-3)\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}16\\-8\\-16\end{pmatrix} \rangle = \langle \begin{pmatrix}40\\120\\-20\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}16\\-8\\-16\end{pmatrix} \rangle = 640 - 960 + 320 = 0$$

Die Vektoren sind linear abhängig.

Zu (b)

$$\langle \begin{pmatrix}1\cdot 4 - (-2)\cdot 2\\(-2)\cdot(-3) - 2\cdot 4\\2\cdot 2 - 1\cdot(-3)\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3\\s\\-2\end{pmatrix} \rangle = \langle \begin{pmatrix}8\\-2\\7\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3\\s\\-2\end{pmatrix} \rangle = 10 - 2s$$

Für $s = 5$ verschwindet dieser Ausdruck, sodass die Vektoren linear abhängig werden.

Aufgabe 3

Gegeben seien die Geraden G_1 durch die Punkte $\vec{A} = \begin{pmatrix}3\\12\\-2\end{pmatrix}$ und $\vec{B} = \begin{pmatrix}8\\1\\-3\end{pmatrix}$ und die Gerade G_2 durch die Punkte $\vec{C} = \begin{pmatrix}2\\-1\\2\end{pmatrix}$ und $\vec{D} = \begin{pmatrix}1\\7\\-13\end{pmatrix}$.

(a) Zeigen Sie, dass $G_1 \cap G_2 = \emptyset$ ist.

(b) Angenommen, die Gerade G^t entsteht aus G_1 durch Verschiebung um t in x_3-Richtung, d.h. $G^t = G_1 + \begin{pmatrix}0\\0\\t\end{pmatrix}$. Wie muss man t wählen, damit G^t die Gerade G_2 schneidet?

Lösungen zu Aufgabe 3

Es gilt

$$G_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 12 \\ -2 \end{pmatrix} + \mathbb{R} \begin{pmatrix} 5 \\ -11 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad G_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + \mathbb{R} \begin{pmatrix} -1 \\ 8 \\ -15 \end{pmatrix}$$

Die Gerade G^t ist dann durch

$$G^t = \begin{pmatrix} 3 \\ 12 \\ -2+t \end{pmatrix} + \mathbb{R} \begin{pmatrix} 5 \\ -11 \\ 1 \end{pmatrix}$$

gegeben. Es ist dann $G_1 = G^0$. Wir berechnen

$$\langle \vec{A} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ t \end{pmatrix} - \vec{C}, \begin{pmatrix} 5 \\ -11 \\ -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -1 \\ 8 \\ -15 \end{pmatrix} \rangle = \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 13 \\ -4+t \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 173 \\ 76 \\ 29 \end{pmatrix} \rangle = 29t + 1045$$

Für $t = 0$ ist dies nicht Null, also treffen sich G_1 und G_2 nicht. Die Geraden G^t und G_2 sind nicht parallel. Damit sie sich treffen, muss daher $t = -\frac{1045}{29}$ gewählt werden.

Aufgabe 4

Sei E die Ebene, die durch die Punkte $\begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 7 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 3 \\ -6 \\ 10 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 9 \end{pmatrix}$ verläuft. Seien $\vec{x} = \begin{pmatrix} 8 \\ 0 \\ -7 \end{pmatrix}$ und $\vec{y} = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}$. Berechnen Sie jeweils den Abstand von $\vec{x}$ und $\vec{y}$ zur Ebene E, sowie jeweils die Gerade, die durch $\vec{x}$ bzw. $\vec{y}$ verläuft und senkrecht auf E steht.

Lösungen zu Aufgabe 4

Die Ebene E ist durch folgende Parameterform gegeben:

$$E = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 7 \end{pmatrix} + \mathbb{R} \left[\begin{pmatrix} 3 \\ -6 \\ 10 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 7 \end{pmatrix} \right] + \mathbb{R} \left[\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 9 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 7 \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 7 \end{pmatrix} + \mathbb{R} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} + \mathbb{R} \begin{pmatrix} -4 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Wir berechnen den auf E liegenden Normalenvektor:

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -4 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (-2) \cdot 2 - 3 \cdot 5 \\ 3 \cdot (-4) - 1 \cdot 2 \\ 1 \cdot 5 - (-2) \cdot (-4) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -19 \\ -14 \\ -3 \end{pmatrix}$$

Seine Länge beträgt

$$\|\vec{n}\| = \sqrt{19^2 + 14^2 + (-3)^2} = \sqrt{361 + 196 + 9} = \sqrt{566}.$$

Sei $\vec{A} = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 7 \end{pmatrix}$ der Ortsvektor von E aus der obigen Parameterform. Wird $\vec{x}$ auf die Ebende E projiziert, so erhält man den Vektor

$$P_E(\vec{x}) = \vec{x} + \frac{\langle \vec{A} - \vec{x}, n \rangle}{\|n\|^2} n.$$

Die Länge des Vektors $P_E(\vec{x}) - \vec{x}$ ist dann der Abstand $d(\vec{x}, E)$ von x zu E.

$$d(\vec{x}, E) = \|P_E(\vec{x}) - \vec{x}\| = \frac{\left|\langle \vec{A} - \vec{x}, n\rangle\right|}{\|n\|} = \frac{\left|\langle \begin{pmatrix} -6 \\ -4 \\ 14 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -19 \\ -14 \\ -3 \end{pmatrix}\rangle\right|}{\sqrt{566}} = \frac{|114 + 56 - 42|}{\sqrt{566}} = \frac{128}{\sqrt{566}}$$

Analog für $\vec{y}$:

$$d(\vec{y}, E) = \|P_E(\vec{y}) - \vec{y}\| = \frac{\left|\langle \vec{A} - \vec{y}, n\rangle\right|}{\|n\|} = \frac{\left|\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -19 \\ -14 \\ -3 \end{pmatrix}\rangle\right|}{\sqrt{566}} = \frac{|-19 - 18|}{\sqrt{566}} = \frac{37}{\sqrt{566}}$$