BERGISCHE UNIVERSITÄT WUPPERTAL

die studien eingangs phase

GEFÖRDERT VOM Bundesministerium für Bildung und Forschung

# Musterlösungen zu Blatt 5

Kleingruppen zur Service-Veranstaltung Mathematik I für Ingenieure bei Prof. Dr. G. Herbort im WS12/13 – Dipl.-Math. T. Pawlaschyk, 13.11.12

## Thema: Vektorrechnung in $\mathbb{R}^2$ und in $\mathbb{R}^3$

### Aufgabe 1

Überprüfen Sie, ob folgende Geraden identisch oder parallel sind oder sich schneiden. In diesem Fall berechnen Sie den Schnittpunkt sowie den Schnittwinkel.

(a) $G_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \mathbb{R} \begin{pmatrix} 12 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad G_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix} + \mathbb{R} \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \end{pmatrix}$

(b) $G_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} + \mathbb{R} \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}, \quad G_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \end{pmatrix} + \mathbb{R} \begin{pmatrix} -4 \\ 6 \end{pmatrix}$

(c) $G_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \end{pmatrix} + \mathbb{R} \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad G_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix} + \mathbb{R} \begin{pmatrix} 4 \\ -12 \end{pmatrix}$

### Lösungen zu Aufgabe 1

Im Folgenden seien stets $G_j = \vec{A}_j + \mathbb{R}\vec{v}_j$, $j = 1, 2$.

zu (a)

Wir prüfen, ob die Richtungsvektoren linear unabhängig sind:

$$\begin{vmatrix} 12 & 2 \\ 3 & 7 \end{vmatrix} = 84 - 6 = 78 \neq 0$$

Die Geraden können also nicht parallel sein und müssen einen Schnittpunkt besitzen. D.h. es gibt Zahlen $s, t$ mit

$$\begin{aligned} & \vec{A}_1 + s\vec{v}_1 = \vec{A}_2 + t\vec{v}_2 \\ \Leftrightarrow \quad & \vec{A}_1 - \vec{A}_2 = -s\vec{v}_1 + t\vec{v}_2 \\ \Leftrightarrow \quad & \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} -12 & 2 \\ -3 & 7 \end{pmatrix}}_{=:M} \begin{pmatrix} s \\ t \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Nach der Cramerschen Regel ist die Lösung gegeben durch

$$s = \frac{\begin{vmatrix} -2 & 2 \\ -2 & 7 \end{vmatrix}}{\det M} = \frac{-14 + 4}{-78} = \frac{5}{39} \quad \text{und} \quad t = \frac{\begin{vmatrix} -12 & -2 \\ -3 & -2 \end{vmatrix}}{\det M} = \frac{24 - 6}{-78} = -\frac{3}{13}$$

Dann ist der Schnittpunkt

$$\begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix} - \frac{3}{13} \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \end{pmatrix} = \frac{1}{13} \left( \begin{pmatrix} 52 \\ 65 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 6 \\ 21 \end{pmatrix} \right) = \frac{1}{13} \begin{pmatrix} 46 \\ 44 \end{pmatrix}$$

Zum Schnittwinkel:

$$\langle \begin{pmatrix} 12 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \end{pmatrix} \rangle = 24 + 21 = 45$$

Die Längen der Richtungsvektoren betragen

$$\| \begin{pmatrix} 12 \\ 3 \end{pmatrix} \| = \sqrt{144+9} = \sqrt{153} \quad \text{und} \quad \| \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \end{pmatrix} \| = \sqrt{4+49} = \sqrt{53}$$

Für den Winkel gilt dann:

$$\cos(\alpha) = \frac{45}{\sqrt{153} \cdot \sqrt{53}} = \frac{45}{\sqrt{8109}} \approx 0,499722453$$

Also $\alpha = \arccos\left(\frac{45}{\sqrt{8109}}\right) \approx \arccos(0,499722453) \approx 60°02'$.

zu (b)

Die Richtungsvektoren sind linear abhängig, denn

$$\begin{vmatrix} 2 & -4 \\ -3 & 6 \end{vmatrix} = 12 - 12 = 0$$

Wir bilden die Differenz der Ortsvektoren und erhalten

$$\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix} = -\vec{v}_1.$$

Daraus folgt, dass die Geraden identisch sind.

zu (c)

Die Richtungsvektoren sind linear abhängig, denn

$$\begin{vmatrix} -1 & 4 \\ 3 & 12 \end{vmatrix} = 12 - 12 = 0.$$

Wir bilden die Differenz der Ortsvektoren und erhalten

$$\begin{pmatrix} 2 \\ -4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -6 \end{pmatrix}.$$

Dieser Vektor ist linear unabhängig zu den Richtungsvektoren $\vec{v}_1$ und $\vec{v}_2$, denn:

$$\begin{vmatrix} -2 & -1 \\ -6 & 3 \end{vmatrix} = -6 - 6 = -12 \neq 0.$$

Damit sind die Geraden parallel, aber nicht identisch.

**Aufgabe 2**

Sei $G$ die Gerade, die durch $\vec{B} = \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \end{pmatrix}$ und $\vec{D} = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix}$ verläuft, und $\vec{P} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ ein Punkt außerhalb der Geraden. Berechnen Sie den Abstand von $G$ zu $\vec{P}$. Bestimmen Sie den Punkt auf $G$ mit dem kleinsten Abstand zu $\vec{P}$.

**Lösungen zu Aufgabe 2**

Die Gerade in Parameterform lautet

$$G = \vec{B} + \mathbb{R}\left(\vec{D} - \vec{B}\right) = \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \end{pmatrix} + \mathbb{R}\begin{pmatrix} 7 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \end{pmatrix} + \mathbb{R}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Wir benutzen die Formeln aus der Vorlesung. Dann gilt für den Abstand von $\vec{P}$ zu $G$:

$$d(x,G) = \frac{|\det\left(\vec{P}-\vec{B}, \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\right)|}{\|\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\|} = \frac{\begin{vmatrix}3 & 1\\2 & 1\end{vmatrix}}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Der Punkt $\vec{S}$ in $G$ mit dem kleinsten Abstand zu $\vec{P}$ ist die Senkrechtprojektion von $\vec{P}$ auf $G$. Diese ist gegeben durch die Formel

$$\vec{S} = P_G(\vec{P}) = \vec{B} + \frac{\langle \vec{P}-\vec{B}, \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\rangle}{\|\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\|^2}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-2\\-4\end{pmatrix} + \frac{5}{2}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} = \frac{1}{2}\left[\begin{pmatrix}-4\\-8\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}5\\5\end{pmatrix}\right] = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\-3\end{pmatrix}$$

**Aufgabe 3**

Seien $E_1$ und $E_2$ die Ebenen, die durch die Punkte $\vec{P}_1 = \begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}$, $\vec{P}_2 = \begin{pmatrix}2\\-3\\0\end{pmatrix}$ und $\vec{P}_3 = \begin{pmatrix}0\\4\\2\end{pmatrix}$ bzw. $\vec{Q}_1 = \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$, $\vec{Q}_2 = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ und $\vec{Q}_3 = \begin{pmatrix}2\\-1\\0\end{pmatrix}$ verlaufen. Stellen Sie die Ebenen jeweils in Parameterform $E = \vec{A} + \mathbb{R}\vec{v} + \mathbb{R}\vec{w}$ dar. Was ist die Schnittmenge von $E_1$ und $E_2$?

**Lösungen zu Aufgabe 3**

Die Parameterformen sind

$$E_1 = \vec{P}_1 + \mathbb{R}\left(\vec{P}_2 - \vec{P}_1\right) + \left(\vec{P}_3 - \vec{P}_1\right) = \begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix} + \mathbb{R}\begin{pmatrix}1\\-5\\-1\end{pmatrix} + \mathbb{R}\begin{pmatrix}-1\\2\\1\end{pmatrix}$$

und

$$E_2 = \vec{Q}_1 + \mathbb{R}\left(\vec{Q}_2 - \vec{Q}_1\right) + \left(\vec{Q}_3 - \vec{Q}_1\right) = \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} + \mathbb{R}\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} + \mathbb{R}\begin{pmatrix}1\\-1\\-1\end{pmatrix}$$

Wir untersuchen zunächst, ob die Ebenen parallel liegen, indem wir prüfen, ob die Richtungsvektoren von $E_2$ durch die Richtungsvektoren von $E_1$ ausgedrückt werden können. Dazu lösen wir die Gleichungssysteme

$$t\begin{pmatrix}1\\-5\\-1\end{pmatrix} + s\begin{pmatrix}-1\\2\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} \quad \text{und} \quad a\begin{pmatrix}1\\-5\\-1\end{pmatrix} + b\begin{pmatrix}-1\\2\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\-1\\-1\end{pmatrix}.$$

Wir erhalten $t = s = -\frac{1}{3}$ und $\lambda = -\frac{1}{3}$ und $\mu = \frac{4}{3}$. Die Differenz der Ortsvektoren der Ebenen ist

$$\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\2\\0\end{pmatrix} = 2\cdot\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}.$$

Dieser Vektor lässt sich durch die Richtungsvektoren der Ebenen darstellen. Die Ebenen sind also identisch. Die Schnittmenge ist $E_1 \cap E_2 = E_1 = E_2$.

**Aufgabe 4**

Überprüfen Sie jeweils, ob die Vektoren $\vec{u}$, $\vec{v}$ und $\vec{w}$ linear unabhängig sind und stellen Sie ggf. $\vec{a}$ und $\vec{b}$ als Linearkombination von $\vec{u}$, $\vec{v}$ und $\vec{w}$ dar.

(a) $\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{w} = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{a} = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 6 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix}$

(b) $\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\vec{v} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{w} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$, $\vec{a} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -15 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$

**Lösungen zu Aufgabe 4**

zu (a)

Angenommen, es sei $\vec{w} = s\vec{u} + t\vec{v}$. Dann muss wegen der Null im zweiten Eintrag von $\vec{w}$ gelten, dass $t = -s$ ist. Also ist

$$\begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \vec{w} = s(\vec{u} - \vec{v}) = s\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = s\begin{pmatrix} -1 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Dann gilt wegen dem letzten Eintrag $1 = 0$, was nicht sein kann. Die Vektoren sind also linear unabhängig. Somit kann Satz 2.2.1.1 aus der Vorlesung angewandt werden. Es gilt:

$$3\vec{u} + 2\vec{v} + \vec{w} = \vec{a} \quad \text{und} \quad \vec{u} + 2\vec{v} + 3\vec{w} = \vec{b}.$$

zu (b)

Angenommen, es sei $\vec{w} = s\vec{u} + t\vec{v}$. Dann muss für die ersten beiden Einträge gelten:

$$\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} = s\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Dies lösen wir mit der Cramerschen Regel und erhalten:

$$s = \frac{\begin{vmatrix} -2 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}} = -\frac{1}{2} \quad \text{und} \quad t = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{3}{2}$$

Für den letzten Eintrag bedeutet dies

$$-3 = (-1)s + 1 \cdot t = (-1)\left(-\frac{1}{2}\right) + \frac{3}{2} = 2.$$

Ein Widerspruch! Daher sind die Vektoren linear unabhängig. Auch hier wenden wir Satz 2.2.1.1 an. Es gilt:

$$2\vec{u} - 4\vec{v} + 3\vec{w} = \vec{a} \quad \text{und} \quad \vec{u} + 2\vec{v} - \vec{w} = \vec{b}$$

**Aufgabe 5**

Seien $\vec{A} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{B} = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{C} = -\vec{A}$ und $\vec{D} = -\vec{B}$. Sei ein 4-Bein mit gelenkig gelagerten Stäben mit Fußpunkten bei $\vec{A}, \vec{B}, \vec{C}, \vec{D}$ gegeben, während das Gelenk bei $\vec{S} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$ liegt. Dort greife die Kraft $\vec{G} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -100 \end{pmatrix}$ an. Was sind die Komponenten der Kraft in Richtung der 4 Stäbe, wenn die Kraft auf alle 4 Stäbe gleichmäßig verteilt ist?

**Lösungen zu Aufgabe 5**

Es gilt

$$\vec{A} - \vec{S} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -4 \end{pmatrix}, \quad \vec{B} - \vec{S} = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ -4 \end{pmatrix}, \quad \vec{C} - \vec{S} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \vec{D} - \vec{S} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix}$$

Wir machen den Ansatz

$$\vec{G} = \alpha(\vec{A} - \vec{S}) + \beta(\vec{B} - \vec{S}) + \gamma(\vec{C} - \vec{S}) + \delta(\vec{D} - \vec{S})$$

In Koordinatenform ergibt das

$$\begin{aligned} 2\alpha - 2\beta - 2\gamma + 2\delta &= 0 \\ -\alpha - \beta + \gamma + \delta &= 0 \\ -4(\alpha + \beta + \gamma + \delta) &= -100 \end{aligned}$$

Die Forderung, dass alle 4 Stäbe die gleiche Last tragen sollen, bedeutet, dass $\alpha = \beta = \gamma = \delta$ ist, also haben alle Koeffizienten den Wert $6,25$.