Übungsaufgaben, Blatt 5

Kleingruppen zur Service-Veranstaltung Mathematik I für Ingenieure bei Prof. Dr. G. Herbort im WS12/13 – Dipl.-Math. T. Pawlaschyk, 13.11.12

Thema: Vektorrechnung in $\mathbb{R}^2$ und in $\mathbb{R}^3$

Aufgabe 1

Überprüfen Sie, ob folgende Geraden identisch oder parallel sind oder sich schneiden. In diesem Fall berechnen Sie den Schnittpunkt sowie den Schnittwinkel.

(a) $G_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \mathbb{R}\begin{pmatrix} 12 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad G_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix} + \mathbb{R}\begin{pmatrix} 2 \\ 7 \end{pmatrix}$

(b) $G_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} + \mathbb{R}\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}, \quad G_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \end{pmatrix} + \mathbb{R}\begin{pmatrix} -4 \\ 6 \end{pmatrix}$

(c) $G_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \end{pmatrix} + \mathbb{R}\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad G_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix} + \mathbb{R}\begin{pmatrix} 4 \\ -12 \end{pmatrix}$

Aufgabe 2

Sei G die Gerade, die durch $\vec{B} = \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \end{pmatrix}$ und $\vec{D} = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix}$ verläuft, und $\vec{P} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ ein Punkt außerhalb der Geraden. Berechnen Sie den Abstand von G zu $\vec{P}$. Bestimmen Sie den Punkt auf G mit dem kleinsten Abstand zu $\vec{P}$.

Aufgabe 3

Seien E_1 und E_2 die Ebenen, die durch die Punkte $\vec{P}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{P}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\vec{P}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$ bzw. $\vec{Q}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{Q}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $\vec{Q}_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ verlaufen. Stellen Sie die Ebenen jeweils in Parameterform $E = \vec{A} + \mathbb{R}\vec{v} + \mathbb{R}\vec{w}$ dar. Was ist die Schnittmenge von E_1 und E_2?

Aufgabe 4

Überprüfen Sie jeweils, ob die Vektoren $\vec{u}$, $\vec{v}$ und $\vec{w}$ linear unabhängig sind und stellen Sie ggf. $\vec{a}$ und $\vec{b}$ als Linearkombination von $\vec{u}$, $\vec{v}$ und $\vec{w}$ dar.

(a) $\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{w} = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{a} = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 6 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix}$

(b) $\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \vec{v} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{w} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}, \vec{a} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -15 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$

Aufgabe 5

Seien $\vec{A} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{B} = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{C} = -\vec{A}$ und $\vec{D} = -\vec{B}$. Sei ein 4-Bein mit gelenkig gelagerten Stäben mit Fußpunkten bei $\vec{A}, \vec{B}, \vec{C}, \vec{D}$ gegeben, während das Gelenk bei $\vec{S} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$ liegt. Dort greife die Kraft $\vec{G} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -100 \end{pmatrix}$ an. Was sind die Komponenten der Kraft in Richtung der 4 Stäbe, wenn die Kraft auf alle 4 Stäbe gleichmäßig verteilt ist?