Musterlösungen zu Blatt 4

Kleingruppen zur Service-Veranstaltung Mathematik I für Ingenieure bei Prof. Dr. G. Herbort
im WS12/13 – Dipl.-Math. T. Pawlaschyk, 06.11.12

Themen: Binomialkoeffizient, Vektorrechnung in $\mathbb{R}^2$

Aufgabe 1

(a) Berechnen Sie mit Hilfe des Pascalschen Dreiecks die Binomialkoeffizienten $\binom{8}{k}$ für $k = 0, \ldots, 8$.

(b) Aus 8 Geschenken soll ein Präsentkorb zusammengestellt werden, in dem sich 2 bis 8 Geschenke befinden sollen. Wieviele Kombinationen von Körben sind möglich?

(c) Angenommen, jemand leiht sich den Geldbetrag K zu 5 Prozent Zinsen pro Jahr. Wie viel müsste er nach 8 Jahren zurückzahlen, wenn er die 8 Jahre lang nie etwas zurückzahlt? Man beachte, dass Zins und Zinseszins anfallen, also 8 mal 5 Prozent Zins nicht reichen.

Hinweis: Benutzen Sie in Teil (b) und (c) den Teil (a).

Lösungen Aufgabe 1

(a) Wir betrachten das Pascalsche Dreieck bis $n = 8$:

$$
\begin{array}{c|ccccccccccccccccc}
\binom{0}{k} & & & & & & & & & 1 & & & & & & & & \\
\binom{1}{k} & & & & & & & & 1 & & 1 & & & & & & & \\
\binom{2}{k} & & & & & & & 1 & & 2 & & 1 & & & & & & \\
\binom{3}{k} & & & & & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & & & & \\
\binom{4}{k} & & & & & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & & & & \\
\binom{5}{k} & & & & 1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 & & & \\
\binom{6}{k} & & & 1 & & 6 & & 15 & & 20 & & 15 & & 6 & & 1 & & \\
\binom{7}{k} & & 1 & & 7 & & 21 & & 35 & & 35 & & 21 & & 7 & & 1 & \\
\binom{8}{k} & 1 & & 8 & & 28 & & 56 & & 70 & & 56 & & 28 & & 8 & & 1
\end{array}
$$

(b) Es gibt $\binom{8}{k}$ Möglichkeiten, einen Präsentkorb mit k von 8 Geschenken zusammenzustellen. Die Lösung ist daher:

$$\sum_{k=2}^{8} \binom{8}{k} = \sum_{k=0}^{8} \binom{8}{k} - \binom{8}{0} - \binom{8}{1} = 1 + 8 + 28 + 56 + 70 + 56 + 28 + 8 + 1 - 1 - 8 = 247$$

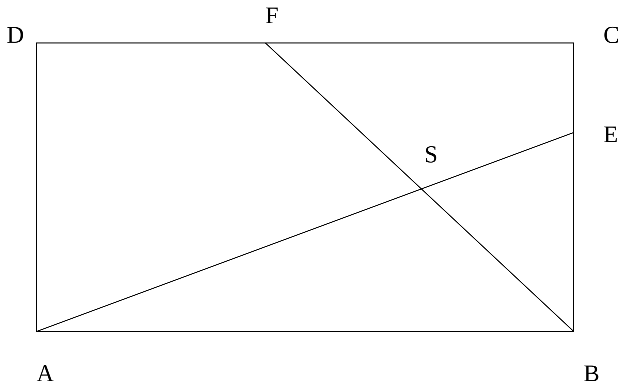
(c) Im ersten Jahr fallen auf K 5 Prozent Zinsen an, d.h. im ersten Jahr sind $K_1 = K + 0,0,5 \cdot K = 1,05 \cdot K$ zurükzuzahlen. Im zweiten Jahr wird dieser Betrag mit 5 Prozent verzinst. Zurückzahlen muss man also $K_1 + 0,05 \cdot K_1 = 1,05 \cdot K_1 = (1,05)^2 K$. Im achten Jahr beträgt die Rückzahlung $(1,05)^8 K$. Wir berechnen

$$
\begin{aligned}
(1,05)^8 &= (1+0,05)^8 = \sum_{k=0}^{8} \binom{8}{k} 0,05^k \\
&= 1 + 8 \cdot 0,05 + 28 \cdot 0,05^2 + 56 \cdot 0,05^3 + 70 \cdot 0,05^4 \\
&+ 56 \cdot 0,05^5 + 28 \cdot 0,05^6 + \cdot 0,05^8 \cdot 0,05 \\
&\approx 1,477455444
\end{aligned}
$$

Aufgabe 2

(a) Zeigen Sie, dass in jedem Viereck die Mittelpunkte der Seiten die Ecken eines Parallelogramms bilden.

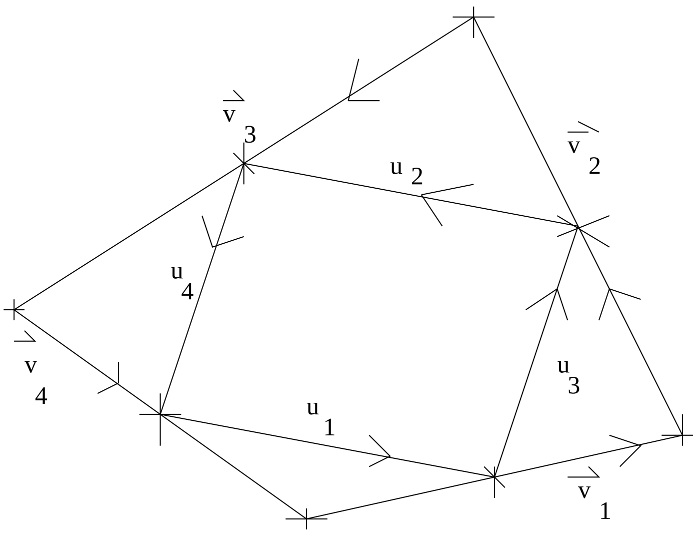
(b) Gegeben sei das folgende Rechteck:



Dabei teilt E die Strecke BC im Verhältnis $2:1$ und F die Strecke CD im Verhältnis $5:4$. In welchem Verhältnis wird AE durch S geteilt?

Lösungen Aufgabe 2

(a)



Es gilt $\vec{v}_1 + \vec{v}_2 + \vec{v}_3 + \vec{v}_4 = 0$ und zugleich $\frac{1}{2}\vec{v}_1 + \frac{1}{2}\vec{v}_2 - \vec{u}_3 = 0$ und $\frac{1}{2}\vec{v}_3 + \frac{1}{2}\vec{v}_4 - \vec{u}_4 = 0$. Addieren wir beide Gleichungen, folgt

$$\frac{1}{2}\vec{v}_1 + \frac{1}{2}\vec{v}_2 - \vec{u}_3 + \frac{1}{2}\vec{v}_3 + \frac{1}{2}\vec{v}_4 - \vec{u}_4 = 0$$

Zusammen mit $\vec{v}_1+\vec{v}_2+\vec{v}_3+\vec{v}_4 = 0$ ergibt sich $\vec{u}_3+\vec{u}_4 = 0$. Dies zusammen mit $\vec{u}_1+\vec{u}_2+\vec{u}_3+\vec{u}_4 = 0$ liefert uns $\vec{u}_1 + \vec{u}_2 = 0$.

(b) Der Schnittpunkt S erfüllt die Gleichung

$$\vec{S} = \vec{A} + t\overrightarrow{AE} = \vec{B} + s\overrightarrow{BF}$$

Daraus erhalten wir

$$t = \frac{\det(\vec{B} - \vec{A}\,,\,\overrightarrow{BF})}{\det(\overrightarrow{AE}, \overrightarrow{BF})} = \frac{\det(\vec{v}_1, \vec{v}_2)}{\det(\vec{v}_1, \vec{v}_2) - \frac{10}{27}\det(\vec{v}_2, \vec{v}_1)} = \frac{27}{37}$$

und weiter

$$\|\vec{S} - \vec{A}\| = \frac{27}{37}\|\overrightarrow{AE}\|\,.$$

Die Strecke AE wird also von S im Verhältnis $27 : (37 - 27) = 27 : 10$ geteilt.

Aufgabe 3

(a) Prüfen Sie, ob die folgenden Vektoren $\vec{v}$ und $\vec{w}$ linear unabhängig sind und stellen Sie ggf. jeweils $\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}$ als Linearkombination von $\vec{v}$ und $\vec{w}$ dar.

(i) $\vec{v} = \begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}$, $\vec{w} = \begin{pmatrix}-1\\-2\end{pmatrix}$ (ii) $\vec{v} = \begin{pmatrix}3\\-2\end{pmatrix}$, $\vec{w} = \begin{pmatrix}-9\\6\end{pmatrix}$ (iii) $\vec{v} = \begin{pmatrix}2\\\frac{1}{5}\end{pmatrix}$, $\vec{w} = \begin{pmatrix}\frac{5}{3}\\3\end{pmatrix}$

(b) Zeigen oder widerlegen Sie folgende Aussagen:

(i) Sind die Paare $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{b}$, $\vec{c}$ jeweils linear abhängig, so auch $\vec{a}$ und $\vec{c}$.

(ii) Sind die Paare $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{b}$, $\vec{c}$ jeweils linear unabhängig, so auch $\vec{a}$ und $\vec{c}$.

(iii) Sind $\vec{a}$, $\vec{b}$ linear abhängig und $\vec{b}$, $\vec{c}$ linear unabhängig, so sind $\vec{a}$ und $\vec{c}$ linear unabhängig.

(iv) Wenn $\langle\vec{a}, \vec{b}\rangle = 0$ und $\langle\vec{b}, \vec{c}\rangle = 0$ sind, so gilt $\langle\vec{a}, \vec{c}\rangle = 0$.

Lösung Aufgabe 3

(a) Laut Vorlesung sind zwei Vektoren $\vec{v}$, $\vec{w}$ genau dann unabhängig, wenn $\det(\vec{v}, \vec{w}) \neq 0$. In diesem Fall kann jeder Vektor $\vec{x}$ in $\mathbb{R}^2$ dargestellt werden als Linearkombination von $\vec{x} = t\vec{v}+s\vec{w}$, wobei

$$t = \frac{\det(\vec{x}, \vec{w})}{\det(\vec{v}, \vec{w})} \quad \text{und} \quad s = \frac{\det(\vec{v}, \vec{x})}{\det(\vec{v}, \vec{w})}.$$

(i) Es ist $\begin{vmatrix}2 & -1\\3 & -2\end{vmatrix} = 2\cdot(-2) - (-1)\cdot 3 = -4+3 = -1$. Also können die Vektoren $\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}$ als Linearkombination von $\vec{v}$ und $\vec{w}$ dargestellt werden. Wir berechnen:

$$t = \frac{\begin{vmatrix}1 & -1\\0 & -2\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}2 & -1\\3 & -2\end{vmatrix}} = \frac{-2}{-1} = 2 \quad \text{und} \quad s = \frac{\begin{vmatrix}2 & 1\\3 & 0\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}2 & -1\\3 & -2\end{vmatrix}} = \frac{-3}{-1} = 3.$$

Wir prüfen leicht: $\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix} + 3\begin{pmatrix}-1\\-2\end{pmatrix}$.

$$t = \frac{\begin{vmatrix}0 & -1\\1 & -2\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}2 & -1\\3 & -2\end{vmatrix}} = \frac{1}{-1} = -1 \quad \text{und} \quad s = \frac{\begin{vmatrix}2 & 0\\3 & 1\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}2 & -1\\3 & -2\end{vmatrix}} = \frac{2}{-1} = -2.$$

Wir prüfen leicht: $\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} = -\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix}-1\\-2\end{pmatrix}$.

$$t = \frac{\begin{vmatrix}3 & -1\\4 & -2\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}2 & -1\\3 & -2\end{vmatrix}} = \frac{-2}{-1} = 2 \quad \text{und} \quad s = \frac{\begin{vmatrix}2 & 3\\3 & 4\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}2 & -1\\3 & -2\end{vmatrix}} = \frac{-1}{-1} = 1.$$

Wir prüfen leicht: $\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}-1\\-2\end{pmatrix}$.

(ii) Es ist $\begin{vmatrix}3 & -9\\-2 & 6\end{vmatrix} = 18 - 18 = 0$. Die beiden Vektoren sind demnach linear abhängig. Es ist im Allgmeinen nicht möglich, einen beliebigen Vektor in $\mathbb{R}^2$ mit Hilfe von $\vec{v}$ und $\vec{w}$ darzustellen.

(iii) Es ist $\begin{vmatrix}2 & \frac{5}{3}\\\frac{1}{5} & 3\end{vmatrix} = 6 - \frac{5}{15} = 6 - \frac{1}{3} = \frac{18-1}{3} = \frac{17}{3}$. Also können die Vektoren $\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}$ als Linearkombination von $\vec{v}$ und $\vec{w}$ dargestellt werden. Wir berechnen:

$$t = \frac{\begin{vmatrix}1 & \frac{5}{3}\\0 & 3\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}2 & \frac{5}{3}\\\frac{1}{5} & 3\end{vmatrix}} = \frac{3}{\frac{17}{3}} = \frac{9}{17} \quad \text{und} \quad s = \frac{\begin{vmatrix}2 & 1\\\frac{1}{5} & 0\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}2 & \frac{5}{3}\\\frac{1}{5} & 3\end{vmatrix}} = \frac{-\frac{1}{5}}{\frac{17}{3}} = -\frac{3}{85}.$$

Wir prüfen leicht: $\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = \frac{9}{17}\begin{pmatrix}2\\\frac{1}{5}\end{pmatrix} - \frac{3}{85}\begin{pmatrix}\frac{5}{3}\\3\end{pmatrix}$.

$$t = \frac{\begin{vmatrix}0 & \frac{5}{3}\\1 & 3\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}2 & \frac{5}{3}\\\frac{1}{5} & 3\end{vmatrix}} = \frac{-\frac{5}{3}}{\frac{17}{3}} = -\frac{15}{51} \quad \text{und} \quad s = \frac{\begin{vmatrix}2 & 0\\\frac{1}{5} & 1\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}2 & \frac{5}{3}\\\frac{1}{5} & 3\end{vmatrix}} = \frac{2}{\frac{17}{3}} = \frac{6}{17}.$$

Wir prüfen leicht: $\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} = -\frac{15}{51}\begin{pmatrix}2\\\frac{1}{5}\end{pmatrix} + \frac{6}{17}\begin{pmatrix}\frac{5}{3}\\3\end{pmatrix}$.

$$t = \frac{\begin{vmatrix}3 & \frac{5}{3}\\4 & 3\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}2 & \frac{5}{3}\\\frac{1}{5} & 3\end{vmatrix}} = \frac{\frac{7}{3}}{\frac{17}{3}} = \frac{7}{17} \quad \text{und} \quad s = \frac{\begin{vmatrix}2 & 3\\\frac{1}{5} & 4\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}2 & \frac{5}{3}\\\frac{1}{5} & 3\end{vmatrix}} = \frac{\frac{37}{5}}{\frac{17}{3}} = \frac{111}{85}.$$

Wir prüfen leicht: $\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix} = \frac{7}{17}\begin{pmatrix}2\\\frac{1}{5}\end{pmatrix} + \frac{111}{85}\begin{pmatrix}\frac{5}{3}\\3\end{pmatrix}$.

(b) zu (i) Sind die Paare $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{b}$, $\vec{c}$ jeweils linear abhängig, so auch $\vec{a}$ und $\vec{c}$. Denn in diesem Fall gibt es Zahlen $t, s \in \mathbb{R}$ mit $\vec{a} = t\vec{b}$ und $\vec{b} = s\vec{c}$. Also ist $\vec{a} = t\vec{b} = t(s\vec{c}) = (ts)\vec{c} = r\vec{c}$ mit $r := ts \in \mathbb{R}$. Somit sind $\vec{a}$ und $\vec{c}$ linear abhängig. Die Aussage in (i) ist also wahr.

zu (ii) Sind die Paare $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{b}$, $\vec{c}$ jeweils linear unabhängig, so auch $\vec{a}$ und $\vec{c}$.
Diese Aussage ist falsch. Denn z.B. sind $\vec{a} = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$, $\vec{c} = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ jeweils linear unabhängig, jedoch trivialerweise nicht $\vec{a} = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ und $\vec{c} = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$.

zu (iii) Sind $\vec{a}$, $\vec{b}$ linear abhängig und $\vec{b}$, $\vec{c}$ linear unabhängig, so sind $\vec{a}$ und $\vec{c}$ linear unabhängig.
Diese Aussage ist richtig, denn wären $\vec{a}$ und $\vec{c}$ linear abhängig, so müssten nach Teil (i) auch $\vec{b}$ und $\vec{c}$ linear abhängig sein. Dies ist ein Widerspruch zur linearen Unabhängigkeit von $\vec{b}$ und $\vec{c}$.

zu (iv) Wenn $\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = 0$ und $\langle \vec{b}, \vec{c} \rangle = 0$ sind, so gilt $\langle \vec{a}, \vec{c} \rangle = 0$.
Diese Aussage ist falsch. Die Vektoren aus Teil (ii) erfüllen die Voraussetzungen, jedoch ist

$$\langle \vec{a}, \vec{c} \rangle = \langle \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} \rangle = \| \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} \|^2 = 1 \neq 0.$$

Aufgabe 4

Sei $\vec{v} = \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$ ein Vektor. Berechnen Sie die Länge von $\vec{v}$. Geben Sie zu $\vec{v}$ einen linear abhängigen Vektor $\vec{w}$ der Länge 1 an. Finden Sie einen Vektor $\vec{z}$, der orthonormal zu $\vec{w}$ ist. Stellen Sie die Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}$ als Lineakombination von $\vec{w}$ und $\vec{z}$ dar. Berechnen Sie die Fläche, die durch das Dreieck $\vec{v}$ und $\vec{a}$ aufgespannt wird, sowie dessen fehlende Seite und die Seitenlängen.

Die Länge von $\vec{v}$ ist $\|\vec{v}\| = \| \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} \| = \sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{5}$.

Wir setzen $\vec{w} := \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$. Dann ist

$$\|\vec{w}\| = \| \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} \| = \frac{1}{\sqrt{5}} \| \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} \| = \frac{1}{\sqrt{5}} \sqrt{5} = 1.$$

Es ist klar, dass ein Vektor $\vec{z}$ genau dann zu $\vec{w}$ orthogonal steht, wenn $\vec{z}$ orthogonal zu $\vec{v}$ ist. Sei $\vec{z} = \begin{pmatrix}z_1\\z_2\end{pmatrix}$. Wir berechnen

$$\langle \vec{z}, \vec{v} \rangle = \langle \vec{z}, \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} \rangle = z_1 + 2z_2 = 0 \Leftrightarrow z_1 = -2z_2.$$

Der Vektor $\begin{pmatrix}-2\\1\end{pmatrix}$ steht also senkrecht auf $\vec{v}$ und somit auch auf $\vec{w}$. Der gesuchte Vektor wäre nun z.B. $\vec{z} := \frac{1}{\| \begin{pmatrix}-2\\1\end{pmatrix} \|} \begin{pmatrix}-2\\1\end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix}-2\\1\end{pmatrix}$.

Wir gehen nun vor wie in Aufgabe 3. Es ist

$$\det(\vec{w}, \vec{z}) = \begin{vmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{-2}{\sqrt{5}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \end{vmatrix} = \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{5} \cdot 5 = 1.$$

Also können die Vektoren $\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}$ als Linearkombination von $\vec{w}$ und $\vec{z}$ dargestellt werden. Wir berechnen:

$$t = \frac{\frac{1}{\sqrt{5}} \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}}{\det(\vec{w}, \vec{z})} = \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \frac{1+2}{1} = \frac{3}{\sqrt{5}} \quad \text{und} \quad s = \frac{\frac{1}{\sqrt{5}} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}}{\det(\vec{w}, \vec{z})} = \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \frac{1-2}{1} = -\frac{1}{\sqrt{5}}.$$

Wir prüfen leicht: $\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} = \frac{3}{\sqrt{5}} \cdot \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} - \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix}-2\\1\end{pmatrix}$.

$$t = \frac{\frac{1}{\sqrt{5}} \begin{vmatrix}-1 & -2\\ 1 & 1\end{vmatrix}}{\det(\vec{w}, \vec{z})} = \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \frac{-1+2}{1} = \frac{1}{\sqrt{5}} \quad \text{und} \quad s = \frac{\frac{1}{\sqrt{5}} \begin{vmatrix}1 & -1\\ 2 & 1\end{vmatrix}}{\det(\vec{w}, \vec{z})} = \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \frac{1+2}{1} = \frac{3}{\sqrt{5}}.$$

Wir prüfen leicht: $\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} + \frac{3}{\sqrt{5}} \cdot \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix}-2\\1\end{pmatrix}$.
Die fehlende Seite des Dreiecks, das von $\vec{a}$ und $\vec{v}$ aufgespannt wird, nennen wir $\vec{s}$. Es ist $\vec{a}+\vec{s} = \vec{v}$. Also ist $\vec{s} = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$. Die Höhe auf $\vec{s}$ ist der senkrecht zu $\vec{s}$ stehende Vektor $\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$. Beide haben eine Länge von 1, d.h. Grundseite und Höhe haben die Seitenlängen 1. Die Fläche des Dreiecks beträgt somit $\frac{1}{2}$.
Alternativ kann man die Fläche des Parallelogramms ausrechnen, welches von $\vec{a}$ und $\vec{v}$ aufgespannt wird. Die Fläche ist dann der Betrag von $\det(\vec{a}, \vec{v}) = 1$. Die Hälfte davon ist die Fläche des von $\vec{a}$ und $\vec{v}$ aufgespannten Dreiecks.