Übungsaufgaben, Blatt 3

Kleingruppen zur Service-Veranstaltung Mathematik I für Ingenieure bei Prof. Dr. G. Herbort im WS12/13 – Dipl.-Math. T. Pawlaschyk, 30.10.12

Thema: Vollständige Induktion

Aufgabe 1 Zeigen Sie, dass folgende Ungleichungen gelten:

(a) $2^n > n \quad$ für alle $n \in \mathbb{N}_0 \qquad$ (b) $(a+b)^n \geq a^n + b^n \quad$ für $a, b \geq 0, n \in \mathbb{N}$

Lösungen zur Aufgabe 1

(a) Induktion über $n \in \mathbb{N}_0$.

Induktionsanfang (IA): Für $n = 0$ ist $2^n = 2^0 = 1 > 0 = n$. Also stimmt die Formel für $n = 0$.

Induktionsvoraussetzung (IV): Die Ungleichung gilt für $n \in \mathbb{N}$, d.h. $2^n > n$.

Induktionsschritt (IS): Man schließt von n auf $n+1$. Zu zeigen ist: $2^{n+1} > n+1$.

$$2^{n+1} = 2 \cdot 2^n \overset{\text{IV}}{>} 2(n+1) = n+1+n+1 > n+1.$$

(b) Induktion über $n \in \mathbb{N}$.

Induktionsanfang (IA): Für $n = 1$ ist $(a+b)^1 = a + b = a^1 + b^1$. Also stimmt die Formel für $n = 1$.

Induktionsvoraussetzung (IV): Die Ungleichung gilt für $n \in \mathbb{N}$, d.h. $(a+b)^n \geq a^n + b^n$.

Induktionsschritt (IS): Man schließt von n auf $n+1$. Zu zeigen ist: $(a+b)^{n+1} \geq a^{n+1} + b^{n+1}$.

$$(a+b)^{n+1} = (a+b) \cdot (a+b)^n \overset{\text{IV}}{\geq} (a+b) \cdot (a^n + b^n) = a^{n+1} + ba^n + ab^n + b^{n+1} \geq a^{n+1} + b^{n+1}$$

Aufgabe 2 Zeigen Sie, dass für $n \in \mathbb{N}$ eine n-elementige Menge genau 2^n Teilmengen besitzt.

Lösung zur Aufgabe 2

Induktion über $n \in \mathbb{N}$.

Induktionsanfang (IA): Man betrachte für $n = 1$ eine 1-elementige Menge. Diese hat die leere Menge und die Menge selbst als Teilmengen. Es gibt also $2 = 2^1$ Teilmengen. Der Induktionsanfang ist gezeigt.

Induktionsvoraussetzung (IV): Man nehme an, dass die Aussage für $n \in \mathbb{N}$ stimmt, d.h. dass jede n-elementige Menge genau 2^n Teilmengen besitzt.

Induktionsschritt (IS): $n \to n+1$. Sei M eine beliebige $(n+1)$-elementige Menge. Sei $x \in M$ und $A := M \setminus \{x\}$. Dann besitzt A genau n Elemente und hat nach der Induktionsvoraussetzung genau 2^n Teilmengen. Die Menge P aller Teilmengen von M, die x nicht enthalten, stimmt mit der Menge aller Teilmengen von A überein. Die Menge S aller Teilmengen von M, die x enthalten, simmt mit der Menge

$$\{B \cup \{x\} : B \in P\}$$

überein. Die Mengen P und S haben jeweils 2^n Elemente und ergeben vereinigt die Menge aller Teilmengen von M. Zudem sind P und S disjunkt. Also hat M genau $2^n + 2^n = 2 \cdot 2^n = 2^{n+1}$ Teilmengen.

Aufgabe 3 (a) Zeigen Sie, dass für alle $n \in \mathbb{N}_0$ gilt

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k k^2 = (-1)^n \ \frac{n(n+1)}{2} \ .$$

(b) Vermuten Sie eine Formel für $\sum_{k=0}^{n} (-1)^k k$ und zeigen Sie sie dann induktiv.

Lösungen zu Aufgabe 3

a) Induktion nach $n \in \mathbb{N}_0$.

Induktionsanfang (IA): Für $n = 1$ sind beide Seiten gleich -1.

Induktionsvoraussetzung (IV): Angenommen, die Formel gelte für $n \in \mathbb{N}_0$.

Induktionsschritt (IS): Dann haben wir

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n+1} (-1)^k k^2 &= \sum_{k=0}^{n} (-1)^k k^2 + (-1)^{n+1}(n+1)^2 \\
&\overset{\text{IV}}{=} (-1)^n \frac{n(n+1)}{2} + (-1)^{n+1}(n+1)^2 \\
&= (-1)^{n+1}(n+1)\left(n+1-\frac{n}{2}\right) \\
&= (-1)^{n+1}\frac{(n+1)(n+2)}{2}
\end{aligned}$$

(b) Wir schreiben $s_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k k$ und sehen:

$$s_0 = 0,\ s_1 = -1,\ s_2 = 1,\ s_3 = -2,\ s_4 = 2,\ s_5 = -3,\ s_6 = 3$$

Wir vermuten daher, dass $s_n = \frac{n}{2}$, wenn n gerade, und $s_n = -\frac{n+1}{2}$, wenn n ungerade ist.

Induktionsbeweis nach n.

IA: $n = 0$ und $n = 1$ sind oben erledigt worden.

IV: Angenommen, die Behauptung gelte für n.

IS: Zum Beweis, dass sie dann für $n + 1$ ebenfalls richtig ist, unterscheiden wir 2 Fälle:
1. Fall: n ist gerade, also $s_n = \frac{n}{2}$. Dann ist $n+1$ ungerade, und wir müssen $s_{n+1} = -\frac{n+2}{2}$ zeigen. Dazu rechnen wir aus:

$$s_{n+1} = s_n + (-1)^{n+1}(n+1) \overset{\text{IV}}{=} \frac{n}{2} - (n+1) = -\frac{n+2}{2}.$$

2. Fall: n ist ungerade, also $s_n = -\frac{n+1}{2}$. Dann ist $n + 1$ gerade, und wir wollen $s_{n+1} = \frac{n+1}{2}$ zeigen. Das folgt aus

$$s_{n+1} = s_n + (-1)^{n+1}(n+1) \overset{\text{IV}}{=} -\frac{n+1}{2} + (n+1) = \frac{n+1}{2}.$$

Aufgabe 4 Zeigen Sie induktiv, dass für alle $t > 0$ und alle natürlichen Zahlen $n \geq 1$ gilt:

$$t^n - n\,t + n - 1 \geq 0$$

Lösung zur Aufgabe 4

Induktion über $n \in \mathbb{N}$.

IA: Für $n = 1$ sind beide Seiten gleich 0.

IV: Angenommen, die Ungleichung gelte für n, also $-nt + n - 1 \geq -t^n$.

IS $n \to n + 1$: Dann haben wir aber

$$\begin{aligned} t^{n+1} - (n+1)t + (n+1) - 1 &= t^{n+1} - nt - t + n + 1 - 1 \\ &= t^{n+1} - t + 1 + (-nt + n - 1) \\ &\overset{\text{IV}}{\geq} t^{n+1} - t + 1 - t^n \\ &= (t^n - 1)(t - 1) \geq 0 \end{aligned}$$

Die letzte Ungleichung ist einfach zu sehen. Ist $t \geq 1$, so ist $t^n \geq 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Also sind $t^n - 1 \geq 0$ und $t - 1 \geq 0$. Für $0 < t < 1$ ist $t^n < 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Somit sind $t^n - 1$ und $t - 1$ negativ. Das Produkt zweier negativer Zahlen ist positiv.