BERGISCHE UNIVERSITÄT WUPPERTAL
die studien eingangs phase
GEFÖRDERT VOM Bundesministerium für Bildung und Forschung

Lösungen zu den Übungsaufgaben, Blatt 2

Kleingruppen zur Service-Veranstaltung Mathematik I für Ingenieure bei Prof. Dr. G. Herbort im WS12/13 – Dipl.-Math. T. Pawlaschyk, 23.10.12

Themen: Wurzeln, Gleichungen, Ungleichungen

Aufgabe 1 Sei für ein $a > 1$ die k-te Näherung der n-ten Wurzel rekursiv definiert durch

$$x_{k+1} = \frac{1}{n}\left((n-1)x_k + \frac{a}{x_k^{n-1}}\right).$$

Berechnen Sie jeweils zu den Startwerten $x_1 = 3$ und $x_1 = 5$ die zweiten und dritten Näherungen der (zweiten) Wurzel von $a = 24$ und der dritten Wurzel von $a = 6$. Schreiben Sie die Näherungen als Bruch und als Dezimalzahl.

Lösungen Aufgabe 1 Startwert $x_1 = 3$ und $a = 24$. Zum Vergleich: $\sqrt{24} \approx 4,898979486$.

$$\begin{aligned} x_2 &= \frac{1}{2}\left(3 + \frac{24}{3}\right) = \frac{11}{2} = 5,5 \\ x_3 &= \frac{1}{2}\left(\frac{11}{2} + \frac{24 \cdot 2}{11}\right) = \frac{217}{44} = 4,931\overline{81} \end{aligned}$$

Startwert $x_1 = 5$ und $a = 24$.

$$\begin{aligned} x_2 &= \frac{1}{2}\left(5 + \frac{24}{5}\right) = \frac{49}{10} = 4,9 \\ x_3 &= \frac{1}{2}\left(\frac{49}{10} + \frac{24 \cdot 10}{49}\right) = \frac{4801}{980} \approx 4,898979592 \end{aligned}$$

Startwert $x_1 = 3$ und $a = 6$. Zum Vergleich: $\sqrt[3]{6} \approx 1,817120593$.

$$\begin{aligned} x_2 &= \frac{1}{3}\left(2 \cdot 3 + \frac{6}{9}\right) = \frac{20}{9} = 2,\overline{2} \\ x_3 &= \frac{1}{3}\left(2 \cdot \frac{20}{9} + \frac{6 \cdot 9^2}{20^2}\right) = \frac{20374}{10800} \approx 1,886481481 \end{aligned}$$

Startwert $x_1 = 5$ und $a = 6$.

$$\begin{aligned} x_2 &= \frac{1}{3}\left(2 \cdot 5 + \frac{6}{25}\right) = \frac{256}{75} = 3,41\overline{3} \\ x_3 &= \frac{1}{3}\left(2 \cdot \frac{256}{75} + \frac{6 \cdot 75^2}{256^2}\right) = \frac{36085682}{14745600} \approx 2,447216933 \end{aligned}$$

Aufgabe 2 Bestimmen Sie jeweils die Lösungsmenge folgender Gleichungen.

(a) $3x^2 + 4x - 10 = 0$ (b) $-5x^2 + 4x - 10 = 0$ (c) $x^2 - (p+q)x + pq = 0$

(d) $2x^3 - 3x - 10 = 0$ (e) $x^3 - 7x^2 = -8$ (f) $5x^3 + 15x^2 - 40x + 20 = 0$

(g) $x^4 + 3x^2 - 10 = 0$ (h) $3x^4 + 2x^2 - 4 = 0$ (i) $3x^4 + 6x^2 = 2$

Lösungen zur Aufgabe 2

Zum Lösen quadratischer Gleichungen bietet sich die aus der Schule bekannte sog. pq-Formel an.

(a) $3x^2 + 4x - 10 = 0 \Leftrightarrow x^2 + \frac{4}{3}x - \frac{10}{3} = 0$. Dann ist:

$$x_{1,2} = -\frac{2}{3} \pm \sqrt{\left(\frac{2}{3}\right)^2 + \frac{10}{3}} = -\frac{2}{3} \pm \sqrt{\frac{4}{9} + \frac{30}{9}} = -\frac{2}{3} \pm \sqrt{\frac{34}{9}} = \frac{-2 \pm \sqrt{34}}{3}.$$

(b) $-5x^2 + 4x - 10 = 0 \Leftrightarrow x^2 - \frac{4}{5}x + 2 = 0$. Dann ist:

$$x_{1,2} = \frac{2}{5} \pm \sqrt{\frac{4}{25} - 2} = \frac{2}{5} \pm \sqrt{\frac{4}{25} - \frac{50}{25}} = \frac{2}{5} \pm \sqrt{-\frac{46}{25}}.$$

Die Gleichung hat keine reelle Lösung.

(c) Für die Gleichung $x^2 - (p+q)x + pq = 0$ erhält man:

$$x_{1,2} = \frac{p+q}{2} \pm \sqrt{\frac{(p+q)^2}{4} - pq} = \frac{p+q}{2} \pm \sqrt{\frac{(p+q)^2}{4} - \frac{4pq}{4}} = \frac{p+q}{2} \pm \sqrt{\frac{(p-q)^2}{4}} = \frac{p+q}{2} \pm \frac{p-q}{2}$$

Die Lösungen lauten somit $x_1 = p$ und $x_2 = q$.

Für das Lösen kubischer Gleichungen $x^3 + px + q = 0$ errate man zunächst eine Lösung x_0 und löse dann die quadratische Gleichung $x^2 + x_0 x + p + x_0^2 = 0$ (siehe Vorlesung).

(d) Man sieht leicht, dass $x_0 = 2$ eine Lösung der Gleichung $2x^3 - 3x - 10 = 0$ ist. Letztere Gleichung ist äquivalent zu $x^3 - \frac{3}{2}x - 5 = 0$.
Man löse nun die quadratische Gleichung $x^2 + 2x - \frac{3}{2} + 4 = x^2 + 2x + \frac{5}{2} = 0$:

$$x_{1,2} = -1 \pm \sqrt{1 - \frac{5}{2}} = -1 \pm \sqrt{-\frac{3}{2}}$$

Es gibt für die quadratische Gleichung keine reelle Lösung. Die einzige Lösung bleibt somit $x_0 = 2$.

(e) Die Zahl $x_0 = -1$ ist eine Lösung der Gleichung $x^3 - 7x^2 + 8 = 0$. D.h., dass es Zahlen a und b gibt, so dass gilt:

$$\begin{aligned} x^3 - 7x^2 + 8 &= (x+1)(x^2 + ax + b) \\ &= x^3 + (a+1)^2 x + (b+a)x + b \end{aligned}$$

Vergleicht man die Koeffizienten der Monome auf beiden Seite, so erhält man, dass $a = -8$ und $b = 8$ sein muss. Die Lösungen der quadratischen Gleichung $x^2 - 8x + 8 = 0$ sind $x_{1,2} = 2(2 \pm \sqrt{2})$.

Alternativ kann man x durch $t + \frac{7}{3}$ ersetzen und erhält die Gleichung $t^3 - \frac{47}{3}t - \frac{470}{27} = 0$. Diese löst man wie in den vorherigen Aufgaben.

(f) Zunächst teile man die Gleichung $5x^3 + 15x^2 - 40x + 20 = 0$ durch 5 und substituiere anschließend mit $x = t - \frac{3}{3} = t - 1$ (Die Methode wurde in der Vorlesung beschrieben). Man

bekommt als neue Gleichung:

$$\begin{aligned} 0 &= (t-1)^3 + 3(t-1)^2 - 8(t-1) + 4 \\ &= (t-1)^2(t-1+3) - 8(t-1) + 4 \\ &= (t^2 - 2t + 1)(t+2) - 8t + 8 + 4 \\ &= t^3 - 2t^2 + t + 2t^2 - 4t + 2 - 8t + 12 \\ &= t^3 - 11t + 14 \end{aligned}$$

Dies ist eine Gleichung der Form wie in den beiden vorherigen Aufgaben. Eine Lösung dieser Gleichung ist $t_0 = 2$. Man löse nun die Gleichung $t^2 + 2t - 11 + 4 = 0$:

$$t_{1,2} = -1 \pm \sqrt{1+7} = -1 \pm \sqrt{8} = -1 \pm 2\sqrt{2}$$

Nach Rücksubstitution sind dann die Lösungen $x_0 = -1 - 1 = -2$ und $x_{1,2} = -1 \pm 2\sqrt{2} - 1 = 2(-1 \pm \sqrt{2})$.

Biquadratische Gleichungen $x^4 + px^2 + q = 0$ lassen sich durch die Substitution $t = x^2$ auf quadratische Gleichungen zurückführen.

(g) Die Gleichung $x^4 + 3x^2 - 10 = 0$ wird mit $t = x^2$ zu $t^2 + 3t - 10 = 0$. Lösungen dazu sind:

$$t_{1,2} = -\frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{9}{4} + 10} = -\frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{49}{4}} = -\frac{3}{2} \pm \frac{7}{2},$$

also $t_1 = 2$ und $t_2 = -5$. Da letztere Zahl negativ ist, kommen nach Rücksubstitution nur die Lösungen $x_{1,2} = \pm\sqrt{2}$ in Frage.

(h) Die Gleichung $3x^4 + 2x^2 - 4 = 0$ wird mit $t = x^2$ und nach teilen durch 3 zu $t^2 + \frac{2}{3}t - \frac{4}{3} = 0$. Lösungen sind:

$$t_{1,2} = -\frac{1}{3} \pm \sqrt{\frac{1}{9} + \frac{4}{3}} = -\frac{1}{3} \pm \sqrt{\frac{13}{9}}.$$

Die Zahl $t_1 = -\frac{1}{3} - \sqrt{\frac{13}{9}}$ ist negativ, jedoch nicht $t_2 = -\frac{1}{3} + \sqrt{\frac{13}{9}}$. Nach Rücksubstitution erhält man als Lösungen

$$x_{1,2} = \pm\sqrt{-\frac{1}{3} + \sqrt{\frac{13}{9}}}.$$

(i) Die Gleichung $3x^4 + 6x^2 = 2$ wird mit $t = x^2$ und dem Teilen durch 3 zu $t^2 + 2t - \frac{2}{3} = 0$. Lösungen sind:

$$t_{1,2} = -1 \pm \sqrt{1 + \frac{2}{3}} = -1 \pm \sqrt{\frac{5}{3}}.$$

Die Zahl $t_1 = -1 - \sqrt{\frac{5}{3}}$ ist offensichtlich negativ, jedoch nicht $t_2 = -1 + \sqrt{\frac{5}{3}}$. Nach Rücksubstitution erhält man als Lösungen

$$x_{1,2} = \pm\sqrt{-1 + \sqrt{\frac{5}{3}}}.$$

Aufgabe 3 Bestimmen Sie jeweils die Lösungsmenge folgender Ungleichungen.

(a) $||x-1|-4| \leq 3$ (b) $|4x+2| \leq |x+1|$ (c) $|x|x + 5x + 10 \geq 0$

Lösungen zur Aufgabe 3

Die Betragsfunktion $x \mapsto |x|$ ist definiert durch $|x| = x$, falls $x \geq 0$, und $|x| = -x$, falls $x < 0$.

(a) Es gilt:

$$\begin{aligned} ||x-1|-4| \leq 3 &\Leftrightarrow -3 \leq |x-1|-4 \leq 3 \\ &\Leftrightarrow 1 \leq |x-1| \leq 7 \\ &\Leftrightarrow 1 \leq |x-1| \quad \text{und} \quad |x-1| \leq 7 \\ &\Leftrightarrow 1 \leq |x-1| \quad \text{und} \quad -7 \leq x-1 \leq 7 \\ &\Leftrightarrow 1 \leq |x-1| \quad \text{und} \quad -6 \leq x \leq 8 \end{aligned}$$

Ist nun $x \geq 1$, so erhält man wegen $1 \leq |x-1|$, dass $1 \leq x-1$ gilt, also $2 \leq x$. Ist $x < 1$, dann ist $1 \leq -x+1$ und somit $x \geq 0$. Soll also x die Ungleichung $1 \leq |x-1|$ erfüllen, so muss $x \leq 0$ oder $x \geq 2$ sein. Zusammen mit der Bedingung $-6 \leq x \leq 8$ ergibt sich für die Lösungemenge

$$\{x \in \mathbb{R} \mid -6 \leq x \leq 0\} \cup \{x \in \mathbb{R} : 2 \leq x \leq 8\}.$$

(b) Es gilt:

$$\begin{aligned} |4x+2| \leq |x+1| &\Leftrightarrow -|x+1| \leq 4x+2 \leq |x+1| \\ &\Leftrightarrow |x+1| \geq -4x-2 \quad \text{und} \quad 4x+2 \leq |x+1| \end{aligned}$$

Ist $x \geq -1$, so erhält man die Bedingungen

$$\begin{aligned} x+1 \geq -4x-2 \quad &\text{und} \quad 4x+2 \leq x+1 \\ 5x \geq -3 \quad &\text{und} \quad 3x \leq -1 \\ x \geq -\frac{3}{5} \quad &\text{und} \quad x \leq -\frac{1}{3} \end{aligned}$$

Für $x < -1$ muss dann gelten, dass

$$\begin{aligned} -x-1 \geq -4x-2 \quad &\text{und} \quad 4x+2 \leq -x-1 \\ 3x \geq -1 \quad &\text{und} \quad 5x \leq -3 \\ x \geq -\frac{1}{3} \quad &\text{und} \quad x \leq -\frac{3}{5} \end{aligned}$$

Die Bedingungen $x < -1$ und $x \geq -\frac{1}{3}$ können gleichzeitig nicht erfüllt werden. Daher ist die Lösungsmenge

$$\left\{x \in \mathbb{R} \mid -\frac{3}{5} \leq x \leq -\frac{1}{3}\right\}.$$

(c) Sei $x \geq 0$. Dann ergibt sich mit quadratischer Erweiterung für die linke Seite der Ungleichung:

$$x^2+5x+10 = \left(x+\frac{5}{2}\right)^2 - \frac{25}{4} + 10 = \left(x+\frac{5}{2}\right)^2 + \frac{15}{4}.$$

Dies ist immer größer oder gleich 0.
Sei nun $x < 0$. Dann erhält man die Ungleichung $-x^2+5x+10 \geq 0$. Es gilt dann:

$$\begin{aligned} & x^2-5x-10 \leq 0 \\ \Leftrightarrow \quad & \left(x-\frac{5}{2}\right)^2 - \frac{25}{4} - 10 \leq 0 \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\Leftrightarrow \quad \left(x-\frac{5}{2}\right)^2-\frac{65}{4}\leq 0\\
&\Leftrightarrow \quad \left(x-\frac{5}{2}\right)^2\leq \frac{65}{4}\\
&\Leftrightarrow \quad -\frac{\sqrt{65}}{2}\leq x-\frac{5}{2}\leq \frac{\sqrt{65}}{2}\\
&\Leftrightarrow \quad \frac{5-\sqrt{65}}{2}\leq x\leq \frac{\sqrt{65}+5}{2}
\end{aligned}
$$

Also: $\frac{5-\sqrt{65}}{2}\leq x<0$. Als Lösungsmenge ergibt sich schließlich

$$
\left\{x\in\mathbb{R}\mid \frac{5-\sqrt{65}}{2}\leq x\right\}
$$

Aufgabe 4 Lösen Sie die folgenden Gleichungen.

$$
\text{(a) } \sqrt{x+1}-\sqrt{3x+4}=-1 \qquad \text{(b) } \sqrt{10-x}-\sqrt{3-x}=\frac{3}{\sqrt{3-x}}
$$

Lösungen Aufgabe 4

(a)

$$
\begin{aligned}
&\sqrt{x+1}-\sqrt{3x+4}=-1\\
\Rightarrow\quad &\left(\sqrt{x+1}-\sqrt{3x+4}\right)^2=1\\
\Leftrightarrow\quad &x+1-2\sqrt{(x+1)(3x+4)}+3x+4=1\\
\Leftrightarrow\quad &4x+4=2\sqrt{(x+1)(3x+4)}\\
\Rightarrow\quad &(4x+4)^2=4(x+1)(3x+4)\\
\Leftrightarrow\quad &4(x+1)^2=(x+1)(3x+4)
\end{aligned}
$$

Die Zahl $x_0=-1$ löst die letzte Gleichung und ist sogar eine Lösung der Ausgangsgleichung. Dies stellt man durch Einsetzen fest. Ist $x_0\neq -1$, so lässt sich der Term $x+1$ aus der letzten Gleichung herausdividieren. Man erhält:

$$
4(x+1)=3x+4\Leftrightarrow x=0.
$$

Die Zahl $x_1=0$ ist ebenfalls eine Lösung der Ausgangsgleichung. Insgesamt sind die Lösungen also $x_0=-1$ und $x_1=0$.

(b)

$$
\begin{aligned}
&\sqrt{10-x}-\sqrt{3-x}=\frac{3}{\sqrt{3-x}}\\
\Rightarrow\quad &\sqrt{(10-x)(3-x)}-(3-x)=3\\
\Leftrightarrow\quad &\sqrt{(10-x)(3-x)}=3+3-x\\
\Rightarrow\quad &(10-x)(3-x)=(6-x)^2\\
\Leftrightarrow\quad &30-13x+x^2=36-12x+x^2\\
\Leftrightarrow\quad &x=-6
\end{aligned}
$$

Durch Einsetzen in die Ausgangsgleichung sieht man, dass $x=-6$ die Gleichung löst.