Musterlösungen zu Blatt 1

Kleingruppen zur Service-Veranstaltung Mathematik I für Ingenieure bei Apl. Prof. Dr. G. Herbort im WS12/13

Dipl. Math. T. Pawlaschyk, 11. Oktober 2012
pawlaschyk@math.uni-wuppertal.de

Aufgabe 1
Gegeben sei die Menge $M = \{1, 2, 3, \ldots, 30\}$ der ganzen Zahlen von 1 bis 30. Seien A, B und C Teilmengen von M gegeben durch

$$A = \{x \in M \mid 2 \text{ teilt } x\},\ B = \{x \in M \mid 3 \text{ teilt } x\} \text{ und } C = \{x \in M \mid 5 \text{ teilt } x\}.$$

Beschreiben Sie A, B und C durch Aufzählung ihrer Elemente und bilden Sie die folgenden Mengen:

i) $A \cap B$	ii) $B \cup C$	iii) $C \setminus B$	iv) $(A \cap B) \cap (B \cup C)$
v) $(A \cup B \cup C)^c$	vi) $A \cap B \cap C$	vii) $(A \cap B) \cup C$	viii) $A \Delta B$

Dabei sei $A \Delta B := (A^c \cap B) \cup (A \cap B^c)$.

Lösung Aufgabe 1
Es sind:

$$\begin{aligned} A &= \{2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20, 22, 24, 26, 28, 30\} \\ B &= \{3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, 24, 27, 30\} \\ C &= \{5, 10, 15, 20, 25, 30\} \end{aligned}$$

Dann gelten:

$$\begin{aligned} \text{i) } A \cap B &= \{6, 12, 18, 24, 30\} \\ \text{ii) } B \cup C &= \{3, 5, 6, 9, 10, 12, 15, 18, 20, 21, 24, 25, 27, 30\} \\ \text{iii) } C \setminus B &= \{5, 10, 20, 25\} \\ \text{iv) } (A \cap B) \cap (B \cup C) &= A \cap B = \{6, 12, 18, 24, 30\} \\ \text{v) } (A \cup B \cup C)^c &= A^c \cap B^c \cap C^c = \{1, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29\} \\ \text{vi) } A \cap B \cap C &= \{30\} \\ \text{vii) } (A \cap B) \cup C &= \{5, 6, 10, 12, 15, 18, 20, 24, 25, 30\} \\ \text{viii) } A \Delta B &= (A^c \cap B) \cup (A \cap B^c) = \{2, 3, 4, 8, 9, 10, 14, 15, 16, 20, 21, 22, 26, 27, 28\} \end{aligned}$$

Aufgabe 2

(1) Sei $M = \{4, \{6, 7\}, \emptyset\}$. Welche Aussagen sind wahr oder falsch?

i) $6 \in M$	ii) $\{6, 7\} \subset M$	iii) $\{4\} \in M$	iv) $\{4\} \subset M$	v) $4 \in M$	vi) $4 \subset M$
vii) $\emptyset \subset M$	viii) $\{\emptyset\} \subset M$	ix) $\emptyset \in M$	x) $\{\emptyset\} \in M$	xi) $\{\{6, 7\}\} \subset M$	

(2) Geben Sie alle Teilmengen von M an.

Lösung Aufgabe 2
Zu (1):

i) falsch	ii) falsch	iii) falsch	iv) wahr	v) wahr	vi) falsch
vii) wahr	viii) wahr	ix) wahr	x) falsch	xi) wahr	

Zu (2):

$$\emptyset, \{4\}, \{\{6,7\}\}, \{\emptyset\}, \{4, \{6,7\}\}, \{4, \emptyset\}, \{\{6,7\}, \emptyset\}, M$$

Aufgabe 3

(1) Für eine endliche Menge S bezeichne man mit $\sharp S$ die Anzahl der Elemente von S. Seien A, B und C endliche Teilmengen einer Menge M. Geben Sie $\sharp(A \cup B)$ in Abhängigkeit von $\sharp A$, $\sharp B$ und $\sharp(A \cap B)$ an. Finden Sie eine ähnliche Formel für $\sharp(A \cup B \cup C)$?

(2) Das erste Semester eines Studienganges S habe 200 Studierende. Das Praktikum A wird von 50 Studierenden belegt. Weiter buchen 60 die Vorlesung B und 30 das Projektfach C. Angenommen, es gebe 15 Studierende, welche A und B belegen, während 10 das Praktikum A und Fach C besuchen und 5 zu Veranstaltungen B und C gehen. Es gebe keinen, der alle 3 Veranstaltungen belegt hat.

i) Wieviele Studienanfänger gehen in *genau eine* Veranstaltung?

ii) Wieviele Studierende gehen in keine der Veranstaltungen A, B, C ?

Lösung Aufgabe 3

Zu (1):
Für die Anzahl der Elemente von $A \cup B$ gilt:

$$\sharp(A \cup B) = \sharp A + \sharp B - \sharp(A \cap B).$$

Dies lässt sich leicht auf die Bestimmung der Anzahl der Elemente von $A \cup B \cup C$ übertragen:

$$\begin{aligned}
\sharp(A \cup B \cup C) &= \sharp(A \cup (B \cup C)) \\
&= \sharp A + \sharp(B \cup C) - \sharp(A \cap (B \cup C)) \\
&= \sharp A + \sharp B + \sharp C - \sharp(B \cap C) - \sharp(A \cap (B \cup C)) \\
&= \sharp A + \sharp B + \sharp C - \sharp(B \cap C) - \sharp((A \cap B) \cup (A \cap C)) \\
&= \sharp A + \sharp B + \sharp C - \sharp(B \cap C) - \sharp(A \cap B) - \sharp(A \cap C) + \sharp((A \cap B) \cap (A \cap C)) \\
&= \sharp A + \sharp B + \sharp C - \sharp(B \cap C) - \sharp(A \cap B) - \sharp(A \cap C) + \sharp(A \cap B \cap C)
\end{aligned}$$

Zu (2.i):
Sei A die Menge der Studierenden, die das Praktikum A belegen. Die Menge B stehe für die Studierenden, die die Vorlesung B hören. Das Projektfach C werde von der Menge C besucht. Dann gilt:

$$\sharp A = 50, \quad \sharp B = 60 \quad \text{und} \quad \sharp C = 30.$$

Weiter gilt:

$$\sharp(A \cap B) = 15, \quad \sharp(A \cap C) = 10 \quad \text{und} \quad \sharp(B \cap C) = 5.$$

Da niemand alle 3 Veranstaltungen besucht, gilt $A \cap B \cap C = \emptyset$.

Die Menge der Studierenden, die genau eine Veranstaltung besuchen, ist die Menge

$$D = (A \setminus (B \cup C)) \cup (B \setminus (A \cup C)) \cup (C \setminus (A \cup B)).$$

Für die Anzahl der Elemente von $A \setminus (B \cup C)$, $B \setminus (A \cup C)$ und $C \setminus (A \cup B)$ überlege man leicht, dass gilt:

$$\begin{aligned}
\sharp(A \setminus (B \cup C)) &= \sharp A - \sharp(A \cap B) - \sharp(A \cap C) = 50 - 15 - 10 = 25 \\
\sharp(B \setminus (A \cup C)) &= \sharp B - \sharp(B \cap A) - \sharp(B \cap C) = 60 - 15 - 5 = 40 \\
\sharp(C \setminus (A \cup B)) &= \sharp C - \sharp(C \cap A) - \sharp(C \cap B) = 30 - 10 - 5 = 15
\end{aligned}$$

Diese drei Mengen sind zudem disjunkt. Daher ist die Anzahl der Studierenden der Menge D genau $\sharp D = 25 + 40 + 15 = 80$.

Zu (2.ii):
Mange $A \cup B \cup C$ ist die Menge aller Studierenden, die mindestens eine Veranstaltung besucht. Von daher ist $(A \cup B \cup C)^c$ die Menge der Studierenden, die keine der Veranstaltungen besuchen. D.h.:

$$\sharp(A \cup B \cup C)^c = 200 - \sharp(A \cup B \cup C).$$

Da kein Studierender alle drei Veranstaltungen besucht, ist $\sharp(A \cup B \cup C) = 0$. Somit erhält man:

$$\begin{aligned}
\sharp(A \cup B \cup C)^c &= 200 - \sharp(A \cup B \cup C) \\
&= 200 - \sharp A - \sharp B - \sharp C + \sharp(B \cap C) + \sharp(A \cap B) + \sharp(A \cap C) \\
&= 200 - 50 - 60 - 30 + 5 + 15 + 10 = 90.
\end{aligned}$$

Aufgabe 4 Bestimmen Sie die folgenden Mengen.

(1) $S_1 = \{x \in \mathbb{Q} \mid 2x - 1 \leq |x + 1|\} \cap \{x \in \mathbb{Q} \mid |x - 1| < 2x\}$

(2) $S_2 = \{x \in \mathbb{Q} \mid 2x - 1 \leq |x + 1|\} \setminus \{x \in \mathbb{Q} \mid |x - 1| < 2x\}$

(3) $S_3 = \{x \in \mathbb{N} \mid x \geq 2\} \cap \{y \in \mathbb{Q} \mid y^2 \leq 30\}$

(4) $S_4 = \{k \in \mathbb{Z} \mid -23.4 \leq k \leq 21.6\} \setminus \{z \in \mathbb{Z} \mid z^2 \leq 302\}$

(5) $S_5 = \{x \in \mathbb{Z} \mid x = 4n \text{ für ein } n \in \mathbb{N}\} \cap \{y \in \mathbb{Z} \mid y = 6m \text{ für ein } m \in \mathbb{N}\}$

Lösung Aufgabe 4

Zu (1):
Man benutzt die Definition des Betrags und erhält:

$$\begin{aligned}
\{x \in \mathbb{Q} \mid 2x - 1 \leq |x + 1|\} &= \{x \in \mathbb{Q} \mid 2x - 1 \leq x + 1\} \cup \{x \in \mathbb{Q} \mid 2x - 1 \leq -x - 1\} \\
&= \{x \in \mathbb{Q} \mid x \leq 2\} \cup \{x \in \mathbb{Q} \mid x \leq 0\} \\
&= \{x \in \mathbb{Q} \mid x \leq 2\} \\
\{x \in \mathbb{Q} \mid |x - 1| < 2x\} &= \{x \in \mathbb{Q} \mid x - 1 < 2x\} \cap \{x \in \mathbb{Q} \mid -2x < x - 1\} \\
&= \{x \in \mathbb{Q} \mid -1 < x\} \cap \{x \in \mathbb{Q} \mid \frac{1}{3} < x\} \\
&= \{x \in \mathbb{Q} \mid \frac{1}{3} < x\}
\end{aligned}$$

Also:

$$S_1 = \{x \in \mathbb{Q} \mid 2x - 1 \leq |x + 1|\} \cap \{x \in \mathbb{Q} \mid |x - 1| < 2x\} = \{x \in \mathbb{Q} \mid \frac{1}{3} < x \leq 2\}$$

Zu (2):
Aus (1) erhalten wir direkt:

$$S_2 = \{x \in \mathbb{Q} \mid 2x - 1 \leq |x + 1|\} \setminus \{x \in \mathbb{Q} \mid |x - 1| < 2x\} = \{x \in \mathbb{Q} \mid \frac{1}{3} \geq x\}$$

Zu (3):
Da S_3 eine Teilmenge der natürlichen Zahlen ist, kann man in der zweiten Menge die rationalen Zahlen durch natürliche Zahlen ersetzen:

$$S_3 = \{x \in \mathbb{N} \mid x \geq 2\} \cap \{y \in \mathbb{N} \mid y^2 \leq 30\}.$$

Da $5^2 = 25$ und $6^2 = 36$ sind, ist die zweite Menge gleich $\{y \in \mathbb{N} \mid y \leq 5\}$. Insgesamt also:

$$S_3 = \{x \in \mathbb{N} \mid 2 \leq x \leq 5\} = \{2, 3, 4, 5\}.$$

Zu (4):
Da S_4 eine Teilmenge der ganzen Zahlen ist und $17^2 = 289$ und $18^2 = 324$ sind, kann man S_4 wie folgt umschreiben:

$$S_4 = \{k \in \mathbb{Z} \mid -23 \leq k \leq 21\} \setminus \{z \in \mathbb{Z} \mid -17 \leq z \leq 17\}.$$

Somit erhält man:

$$S_4 = \{-23, -22, -21, -20, -19, -18, 18, 19, 20, 21\}.$$

Zu (5):
Die Menge S_5 besteht aus den ganzen Zahlen, die sich sowohl durch 4 als auch durch 6 teilen lassen. In S_5 ist also auch die Menge der ganzen Zahlen enthalten, die sich durch 12 teilen lassen. Umgekehrt kann man jedes x aus S_5 schreiben als $x = 4n = 6m$ für n und m ganzzahlig und positiv mit $m < n$. Dann ist $x = 3x - 2x = 12n - 12m = 12(n - m) = 12k$, wobei $k = n - m$ ebenfalls positiv und ganzzahlig ist. Somit ist jedes x aus S_5 auch durch 12 teilbar. Insgesamt ist also S_5 die Menge aller ganzen positiven Zahlen, die sich durch 12 teilen lassen, also

$$S_5 = \{x \in \mathbb{Z} \mid x = 12k \text{ für ein } k \in \mathbb{N}\}.$$