4. Funktionen in einer Variable

- Lineare Funktionen
- Quadratische Funktionen
- Polynome
- Gebrochenrationale Funktionen
- Trigonometrische Funktionen
- Exponential- und Logarithmusfunktionen
- Übersicht

Reelle Funktionen in einer Variablen

Definition 4.1

Eine reelle Funktion f ist eine Zuordnung, die jedem Element aus einer Menge $\mathbb{D}_f$ eindeutig eine reelle Zahl, den Funktionswert $f(x)$ zuordnet. $\mathbb{D}_f$ heißt *Definitionsbereich* von f, die Menge möglicher Funktionswerte $\mathbb{W}_f$ heißt *Wertebereich* von f.

Bezeichnung 4.2

Ist f eine Funktion, so bezeichnen wir häufig den Wert von f an einer Stelle x mit $y = f(x)$.
x heißt dann unabhängige Variable *oder Argument von f, y heißt* abhängige Variable.

Funktionsdefinition

Funktionen können auf unterschiedliche Weise gegeben sein, z. B. durch Angabe einer Formel (des Funktionsterms), einer Wertetabelle (Auswertung einer Messung) oder durch eine Grafik.

Ist eine Funktion durch eine Formel gegeben, so besteht der *Definitionsbereich* aus allen Werten, für die der Funktionsterm ausgewertet werden kann, es sei denn, ein anderer (kleinerer) Definitionsbereich ist explizit angegeben.

Schreibweise:

$$f : \mathbb{D}_f \longrightarrow \mathbb{W}_f$$
$$f : x \longmapsto f(x)\,.$$

Beispiele für Funtionen

Beispiel 4.3

- $f(x) = 2,\ \mathbb{D} = \mathbb{R}$
- $f(x) = 0,\ \mathbb{D} = \mathbb{R}$
- $f(x) = x,\ \mathbb{D} = \mathbb{R}$
- $f(x) = -x + 1,\ \mathbb{D} = \mathbb{R}$
- $g(p) = p^2,\ \mathbb{D} = \mathbb{R}$
- $h(p) = \sqrt{p},\ \mathbb{D} = \mathbb{R}_+^0$
- $f(\theta) = \sin(\theta),\ \mathbb{D} = \mathbb{R}$
- $h(z) = 2^z,\ \mathbb{D} = \mathbb{R}$
- $f(x) = \frac{1}{x},\ \mathbb{D} = \mathbb{R} \setminus \{0\}$
- $f(x) = |x|,\ \mathbb{D} = \mathbb{R}$

Eigenschaften von Funktionen

Nullstellen Lösungen der Gleichung $f(x) = 0$

Symmetrie

- achsensymmetrisch zur y-Achse oder *gerade*
  $\iff f(-x) = f(x) \qquad \forall x \in \mathbb{D}_f$
- punktsymmetrisch zum Ursprung oder *ungerade*
  $\iff f(-x) = -f(x) \qquad \forall x \in \mathbb{D}_f$

Monotonie

- streng monoton wachsend
  $\iff f(x) < f(y) \qquad \forall x, y \in \mathbb{D}_f : \; x < y$
- monoton wachsend
  $\iff f(x) \leq f(y) \qquad \forall x, y \in \mathbb{D}_f : \; x < y$
- streng monoton fallend
  $\iff f(x) > f(y) \qquad \forall x, y \in \mathbb{D}_f : \; x < y$
- monoton fallend
  $\iff f(x) \geq f(y) \qquad \forall x, y \in \mathbb{D}_f : \; x < y$

Beispiel 4.4

Es sei

$$f(x) = \frac{1}{x^2 + 2x - 1}$$

Zur Bestimmung des Definitionsbereiches müssen wir feststellen, für welche Werte von x der Nenner Null wird.

Es gilt $x^2 + 2x - 1 = 0 \iff x = -1 \pm \sqrt{2}$. Also ist $\mathbb{D}_f = \mathbb{R} \setminus \{-1 + \sqrt{2}, -1 - \sqrt{2}\}$.

Beispiel 4.5

Es sei

$$g(x) = \sqrt{3 - x}$$

Da die Wurzel nur für nichtnegative Zahlen definiert ist, gilt $\mathbb{D}_g = (-\infty, 3]$.

Eindeutigkeit

Wichtig an der Definition einer Funktion ist die *Eindeutigkeit der Zuordnung*. Nicht jede Gleichung mit zwei Variablen ist eine Funktion.

Die Gleichung $x^2 + y^2 = 25$ beschreibt einen Kreis um den Koordinatenursprung mit Radius 5. Die Kreisgleichung ist keine Funktionsgleichung, da zu jedem $x \in (-5, 5)$ zwei Werte $y = \pm\sqrt{25 - x^2}$ gehören, die Zuordnung ist also nicht eindeutig.

Grafisch bedeutet die Eindeutigkeit der Zuordnung, dass jede Parallele zur y-Achse den Funktionsgraphen höchstens einmal schneiden darf.

Lineare Funktionen

Häufig werden in den Wirtschaftswissenschaften als einfache Modelle lineare Modelle verwendet.
Eine Funktion

$$f : x \longmapsto f(x)$$
$$f(x) = a\,x + b$$

mit reellen Konstanten a und b, heißt lineare Funktion. Der Graph einer linearen Funktion ist eine Gerade mit der Steigung a und dem y-Achsenabschnitt b.

Beispiel 4.6

Gemäß dem Hookschen Gesetz ist die Federkraft F einer Feder proportional zur Auslenkung x (aus der Ruhelage), der Proportionalitätsfaktor wird *Federkonstante* (oder Federhärte) genannt. Um die Feder doppelt so weit auszulenken, ist demnach die doppelte Kraft nötig.

$$F(x) = D \cdot x$$

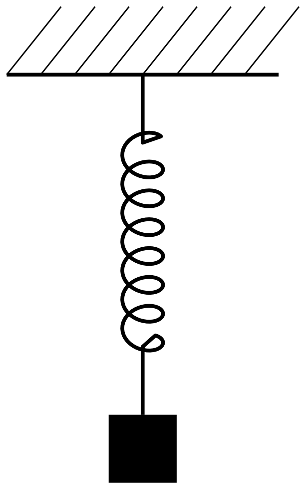


Abbildung: Mechanische Feder (Beispiel 4.6)

Beispiel 4.6 (fort.)

Anhand einer Messreihe an einer Feder möchte man (im Rahmen der Messgenauigkeiten) die Federhärte bestimmen. Wir bilden jeweils den Quotienten $F(x)/x$:

F(x) [N]	0,5	1,0	1,5	2,0	2,5	3,0	3,5
x [cm]	2,5	4,9	7,5	9,9	12,6	14,9	17,4
$F(x)/x$	0,2	0,2	0,2	0,2	0,2	0,2	0,2

Wir erhalten also für diese Feder eine Federhärte von $0,2\,\frac{\text{N}}{\text{cm}} = 20\,\frac{\text{N}}{\text{m}}$.

Beispiel 4.7

Ein einfaches Modell einer Kostenfunktion ist die Darstellung der Gesamtkosten als Summe der Fixkosten und der als proportional zur produzierten Menge x angenommenen variablen Kosten, z. B.

$$C(x) = 0.5x + 10\,.$$

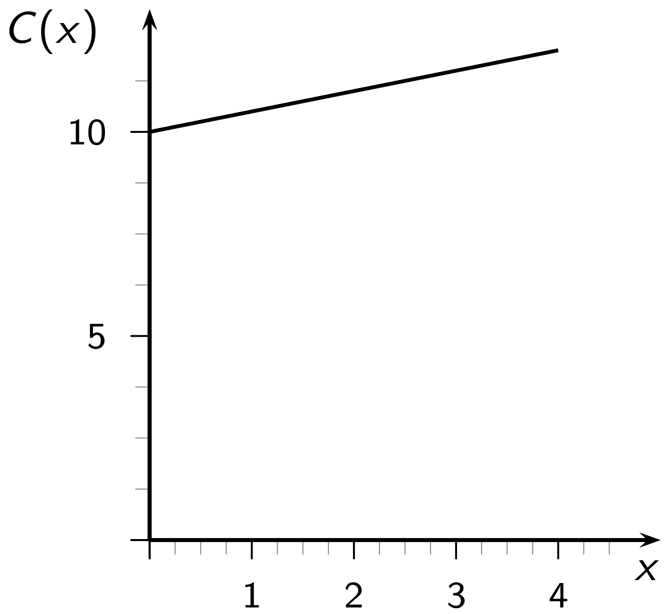


Abbildung: Lineare Kostenfunktion

Steigt die Produktion um eine Einheit, so steigen die Kosten um 0.5 Einheiten.

Punkt-Steigungs-Formel einer Geraden

Die Gleichung einer Geraden mit der Steigung a durch den Punkt (x_1, y_1) ist gegeben durch

$$y = a\,x + \underbrace{(y_1 - a\,x_1)}_{y\text{-Achsenabschnitt}}$$

Zwei-Punkte-Formel einer Geraden

Die Gleichung einer Geraden durch die Punkte (x_1, y_1) und (x_2, y_2) mit $x_1 \neq x_2$ ist gegeben durch

$$y = \underbrace{\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}}_{\text{Steigung}} \cdot x + \underbrace{y_1 - \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \cdot x_1}_{y\text{-Achsenabschnitt}}$$

Parallelen zur y-Achse sind keine Funktionsgraphen. Die zugehörigen Geradengleichungen lassen sich aber in der Form $x = c$ mit einer Konstanten c angeben.

Schnitt von zwei Geraden

Beispiel 4.8

Bestimmen Sie die Menge der Schnittpunkte der zwei Geraden

- $g_1(x) = 2x + 2$ und
- $g_2(x) = -x + 1$.

Gleichsetzen:

$$\begin{aligned} 2x + 2 &= -x + 1 \\ \Longleftrightarrow \quad x &= -\frac{1}{3} \end{aligned}$$

Damit ergibt sich als eindeutiger Schnittpunkt: $(-\frac{1}{3}, \frac{4}{3})$.

Quadratische Funktionen

In vielen Modellen werden Funktionen verwendet, die zunächst auf einen Minimalwert fallen und dann ansteigen oder erst auf einen Maximalwert ansteigen und dann fallen.
Einfache Funktionen mit diesen Eigenschaften sind quadratische Funktionen

$$f(x) = a\,x^2 + b\,x + c \text{ mit Konstanten } a, b, c, \text{ und } a \neq 0\,.$$

Der Graph der Funktion ist eine *Parabel*. Sie ist nach oben geöffnet, wenn $a > 0$ und nach unten geöffnet, wenn $a < 0$ ist.
Zur Bestimmung der Nullstellen (Schnittpunkte mit der x-Achse) ist die Gleichung

$$ax^2 + bx + c = 0$$

zu lösen (vgl. Kapitel 2). Eine quadratische Funktion besitzt am sogenannten Scheitelpunkt ein Minimum falls $a > 0$ und ein Maximum falls $a < 0$.

Beispiel 4.9 (Bestimmung des Minimums einer quadratischen Funktion)

$f(x) = 2x^2 - 4x + 5$.
Der Graph ist eine nach oben geöffnete Parabel. Somit besitzt die Funktion ein Minimum. Wir bringen die Funktionsgleichung mittels quadratischer Ergänzung auf eine andere Form.

$$\begin{aligned} f(x) &= 2x^2 - 4x + 5 \\ &= 2(x^2 - 2x + 1) - 2 + 5 \\ &= 2 \cdot (x-1)^2 + 3 \end{aligned}$$

An dieser Darstellung (Scheitelpunktform) lässt sich nun ablesen, dass die Funktion an der Stelle $x = 1$ ein Minimum besitzt mit $f(1) = 3$. Der Scheitelpunkt ist $S(1, 3)$.

Beispiel 4.9 (fort.)

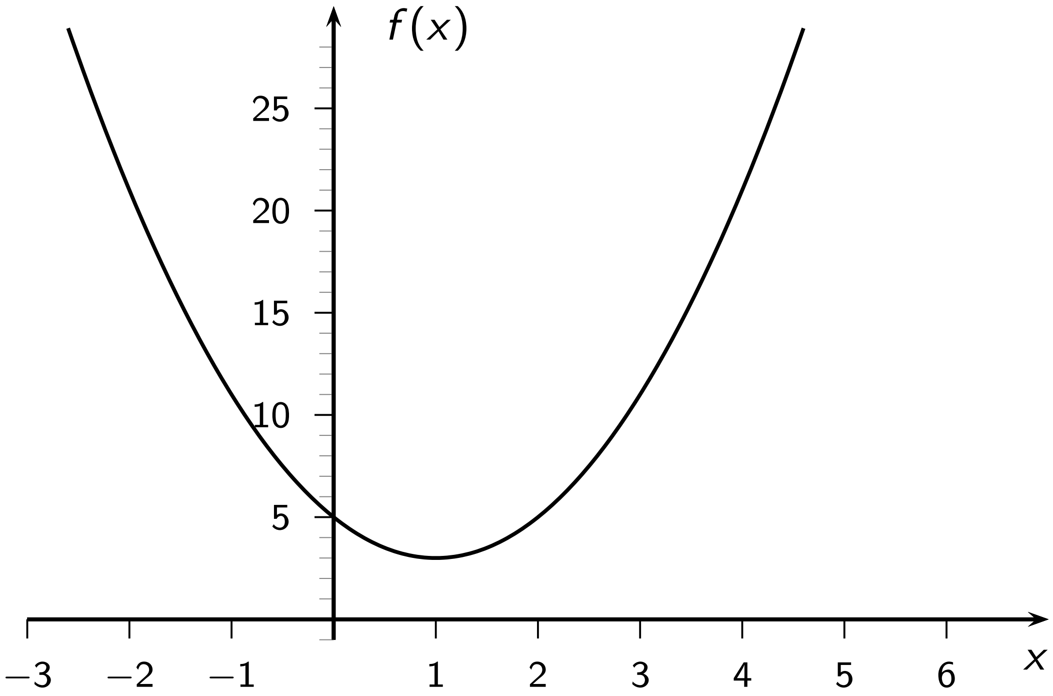


Abbildung: Quadratische Funktion $f(x) = 2x^2 - 4x + 5$, Minimum bei $(1, 3)$ (Beispiel 4.9)

Bestimmung der Scheitelpunktform

$$
\begin{aligned}
f(x) &= a\,x^2 + b\,x + c \\
&= a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2\right) - \frac{b^2}{4a} + c \\
&= a \cdot \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + c - \frac{b^2}{4a}
\end{aligned}
$$

Da $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 \geq 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$ und a, c und $\frac{b^2}{4a}$ konstant sind, gilt:
Für $a > 0$ hat die Funktion an der Stelle $x = -\frac{b}{2a}$ ein Minimum $f(-\frac{b}{2a}) = c - \frac{b^2}{4a}$.
Für $a < 0$ hat die Funktion an der Stelle $x = -\frac{b}{2a}$ ein Maximum $f(-\frac{b}{2a}) = c - \frac{b^2}{4a}$.
Der Scheitelpunkt ist $S(-\frac{b}{2a}, c - \frac{b^2}{4a})$.

Beispiel 4.10

Wir bestimmen das Maximum von $f(x) = -2x^2 + 8x + 20$. Es gilt:

$$\begin{aligned} f(x) &= -2(x^2 - 4x + 4) + 8 + 20 \\ &= -2 \cdot (x-2)^2 + 28 \end{aligned}$$

$f(x)$ besitzt also an der Stelle $x = 2$ ein Maximum mit Funktionswert $f(2) = 28$.

Beispiel 4.10 (fort.)

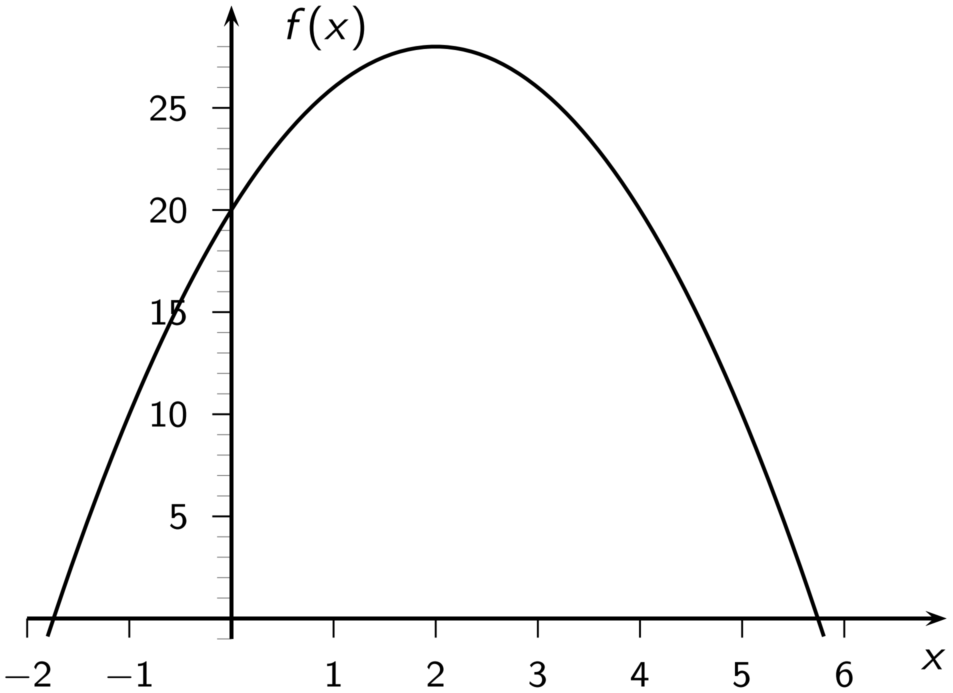


Abbildung: Quadratische Funktion $f(x) = -2x^2 + 8x + 20$, Maximum bei $(2, 28)$ (Beispiel 4.10)

Normalparabel

Die einfachste quadratische Funktion ordnet jeder reellen Zahl x ihre Quadratzahl x^2 zu, d. h.

$$\begin{aligned} f &: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_+^0 \\ f &: x \longmapsto x^2 \,. \end{aligned}$$

Der Graph ist die nach oben geöffnete Normalparabel, $S(0,0)$ der Scheitelpunkt. Die Normalparabel ist symmetrisch zur y-Achse, d. h. x und $-x$ besitzen denselben Funktionswert.

Streckung bzw. Stauchung der Normalparabel

Wir betrachten nun etwas allgemeinere quadratische Funktionen der Form

$$g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{W}_g\,, \quad g : x \longmapsto a\,x^2$$

mit einem Faktor $a \neq 0$. Dabei ist der Wertebereich

$$\mathbb{W}_g = \begin{cases} \mathbb{R}_+^0 & \text{falls } a > 0 \\ \mathbb{R}_-^0 & \text{falls } a < 0 \end{cases}$$

und der Scheitelpunkt ist unverändert $S(0,0)$. Für $|a| > 1$ ist die Parabel enger, für $|a| < 1$ weiter als die Normalparabel. Ist $a < 0$, so ist der Graph zusätzlich an der x-Achse gespiegelt.

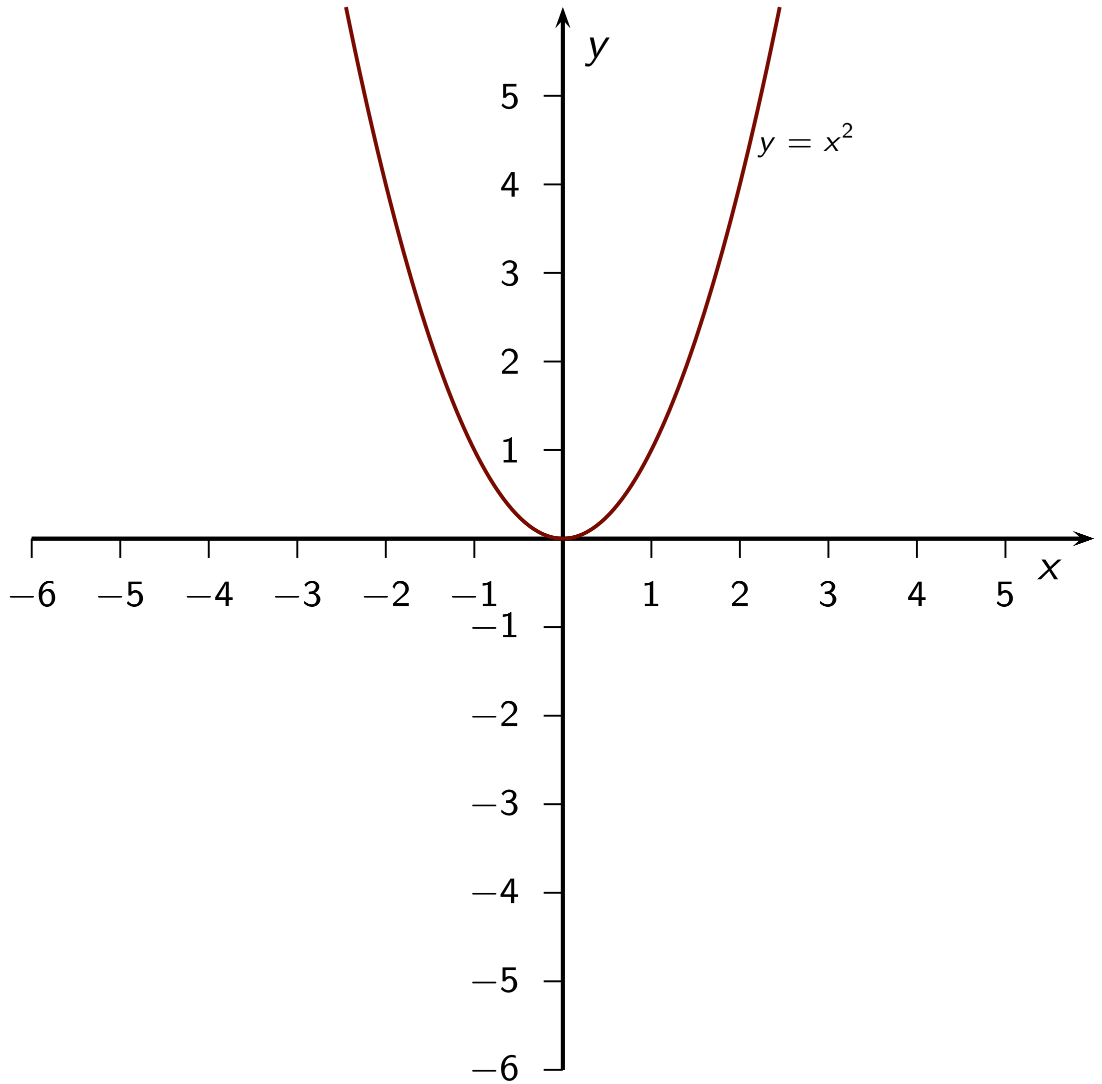


Abbildung: Skalierungen der Normalparabel

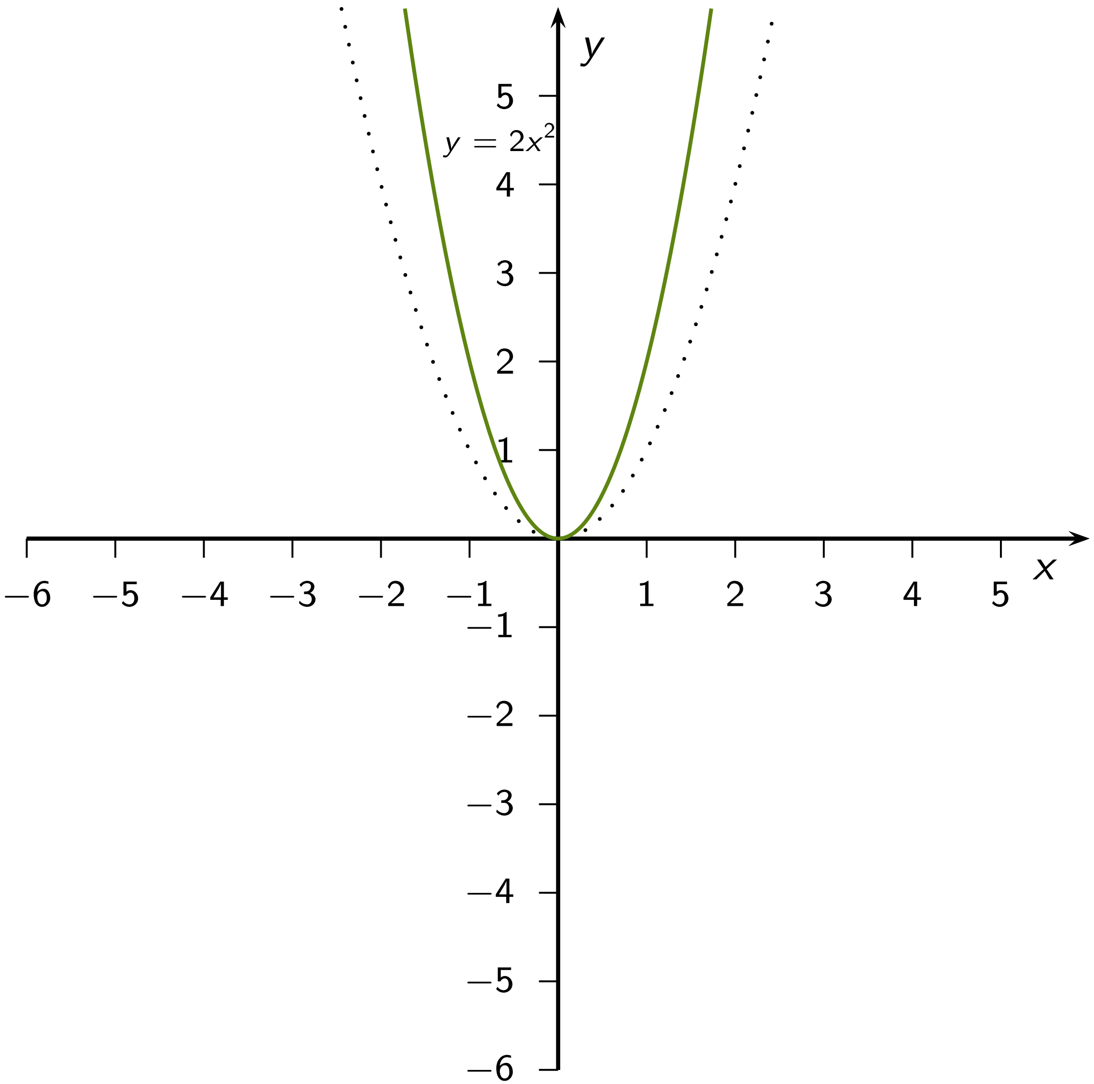


Abbildung: Skalierungen der Normalparabel

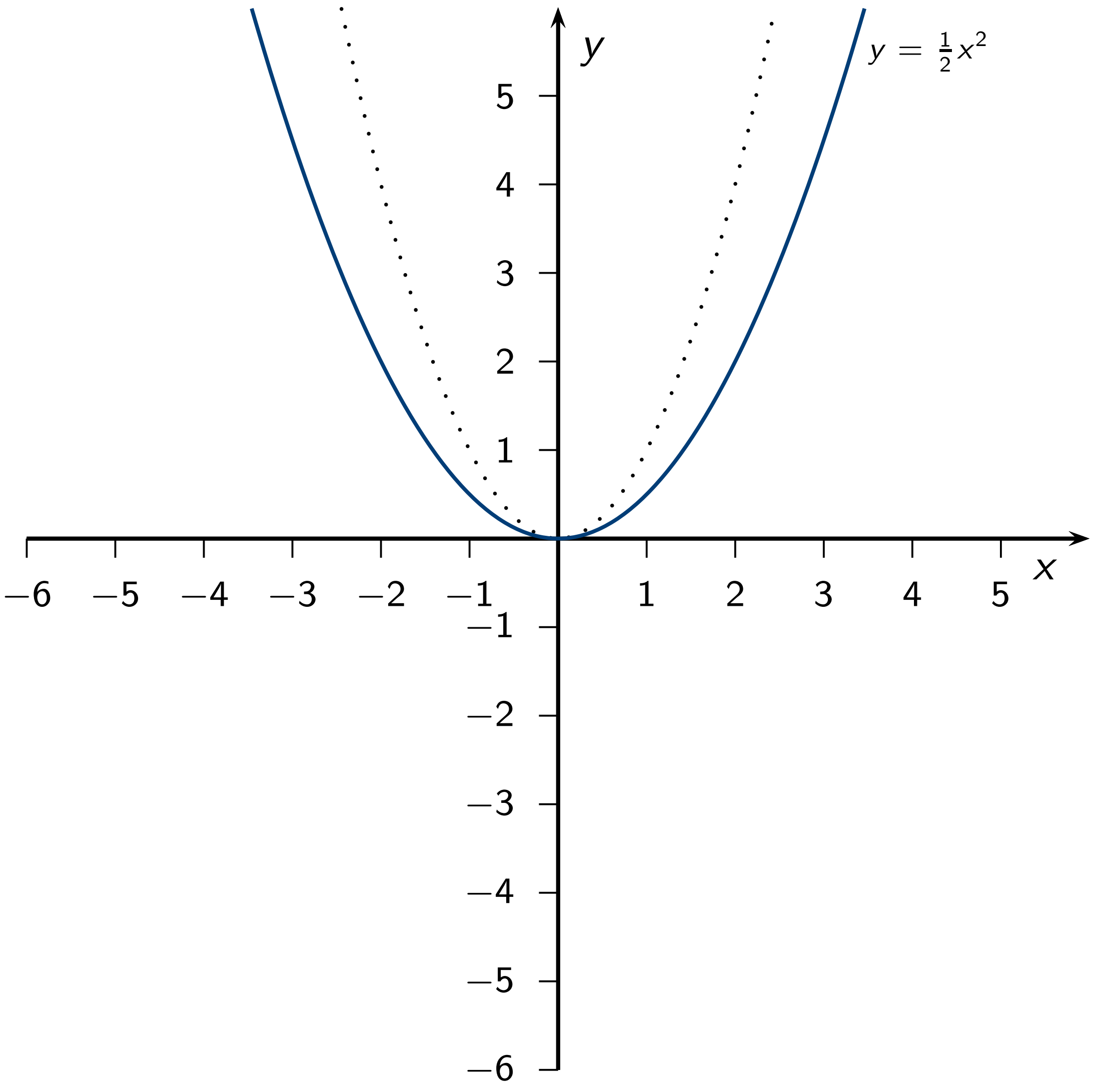


Abbildung: Skalierungen der Normalparabel

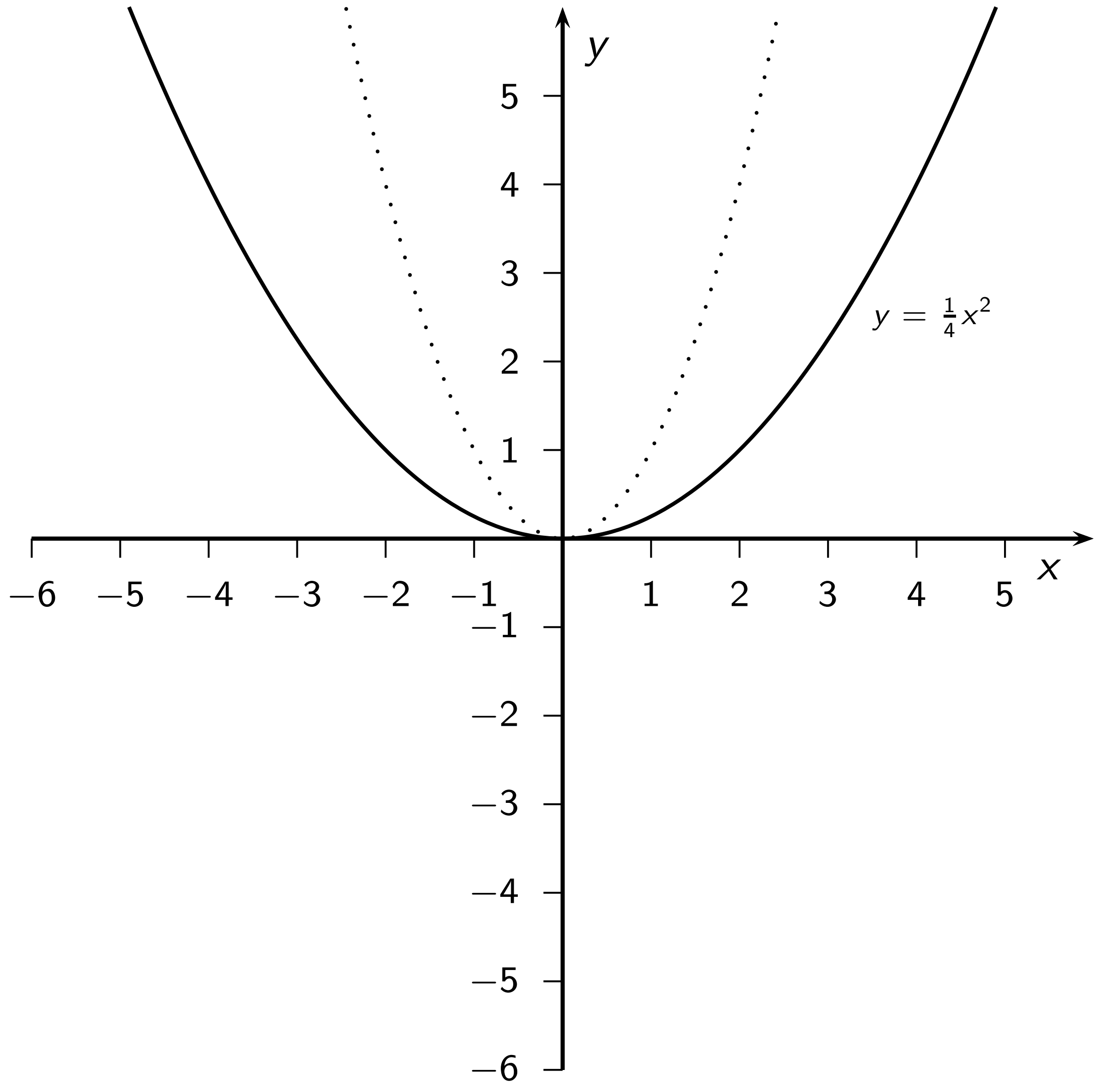


Abbildung: Skalierungen der Normalparabel

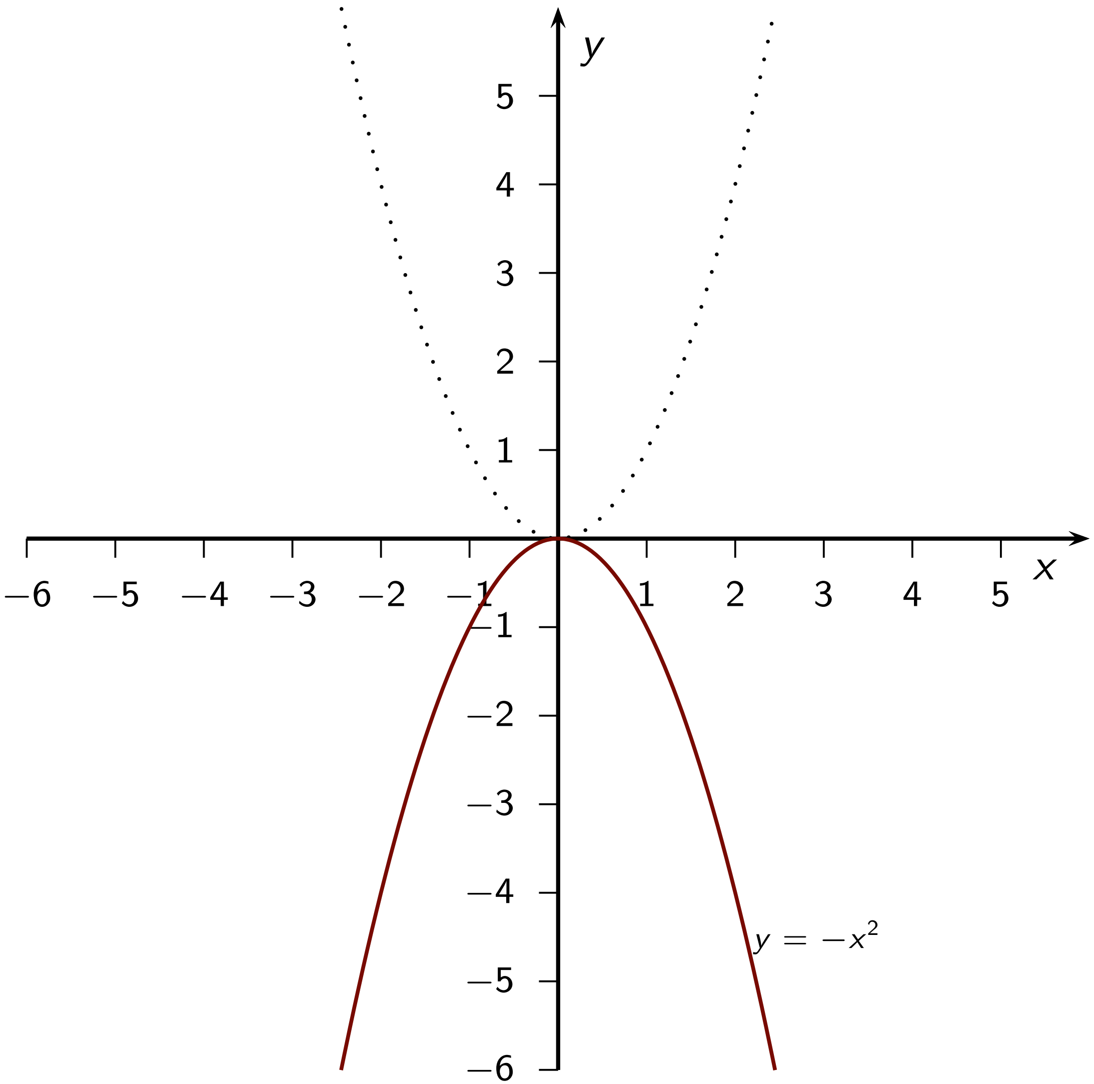


Abbildung: Skalierungen der Normalparabel

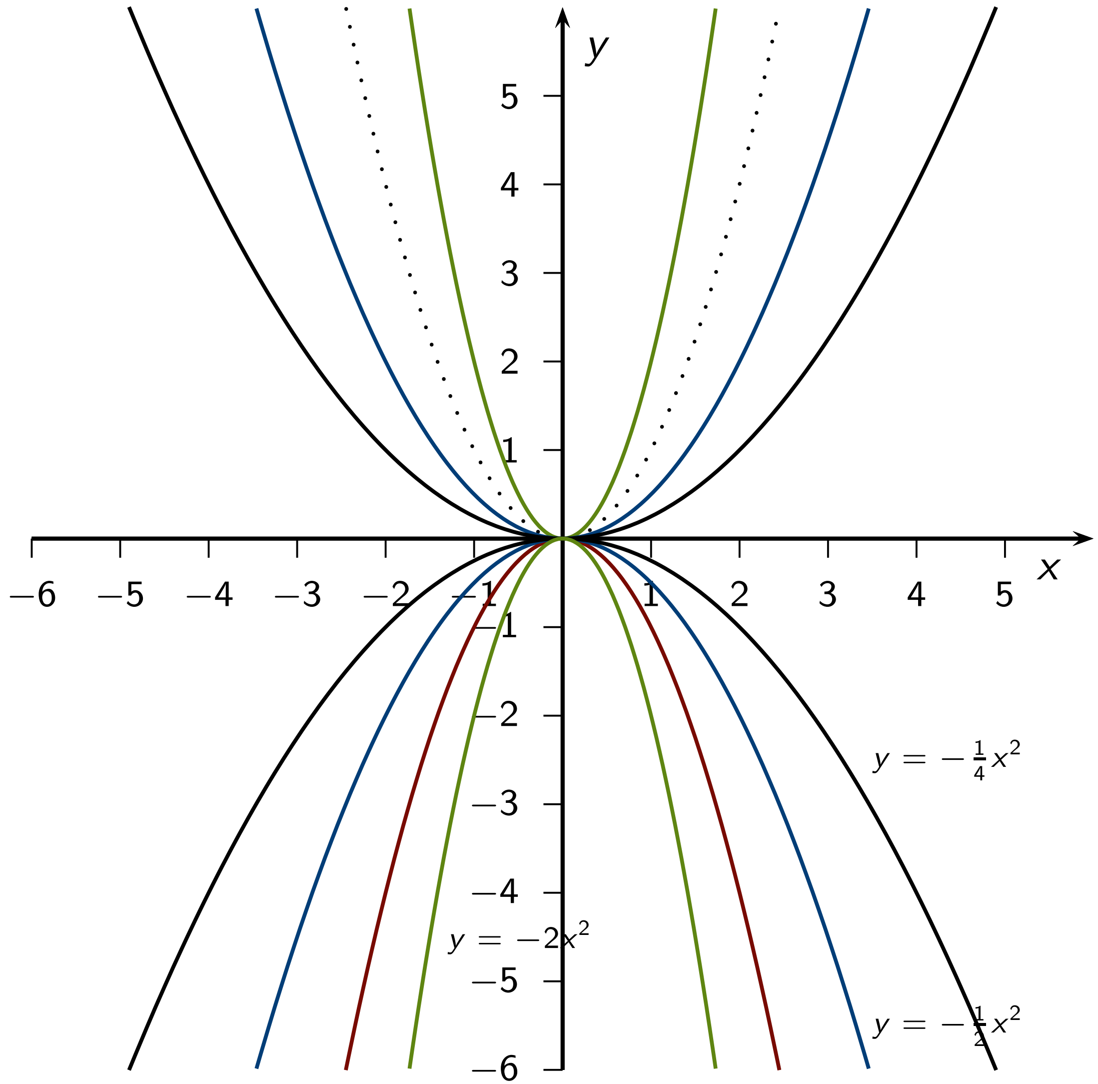


Abbildung: Skalierungen der Normalparabel

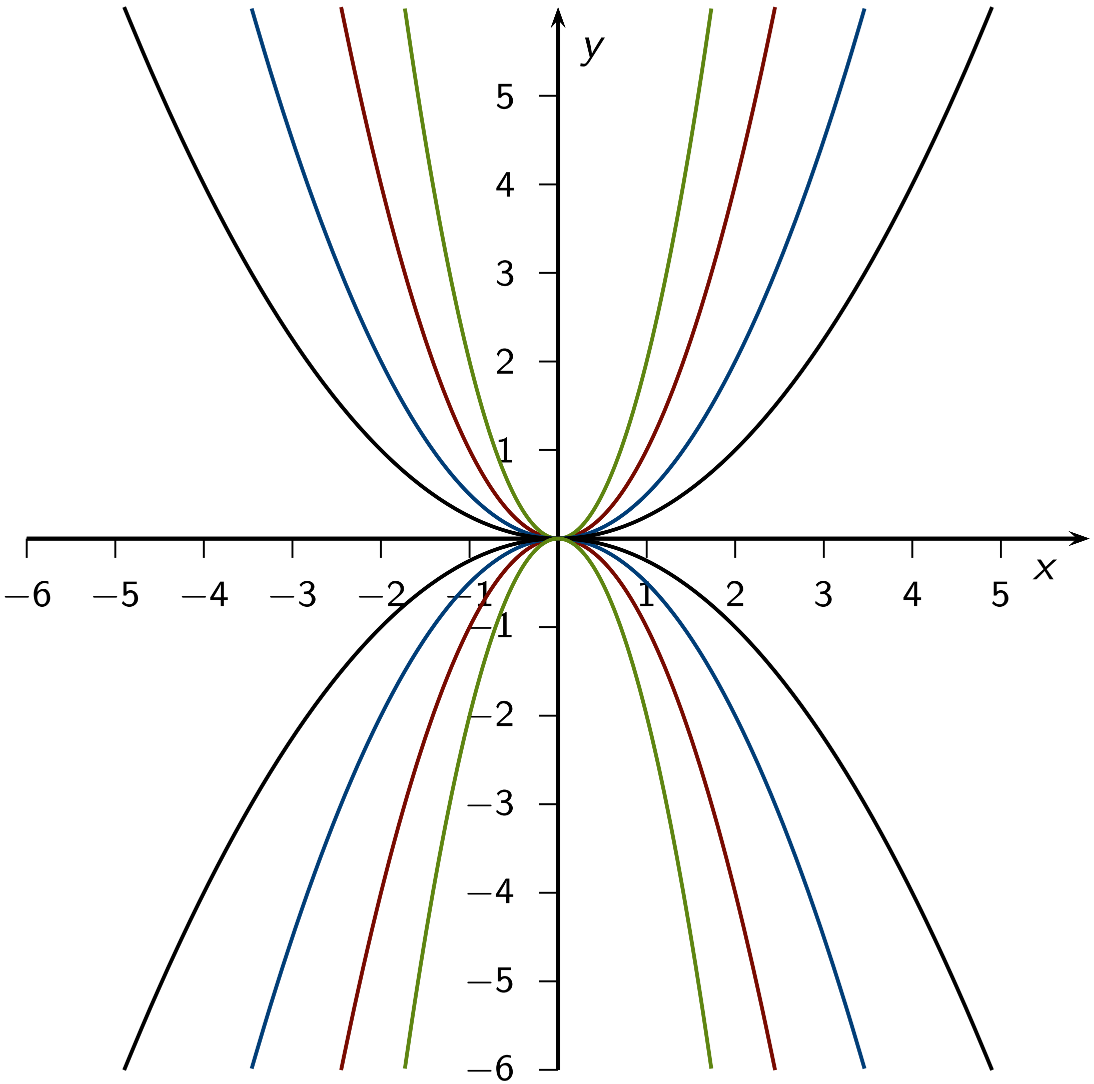


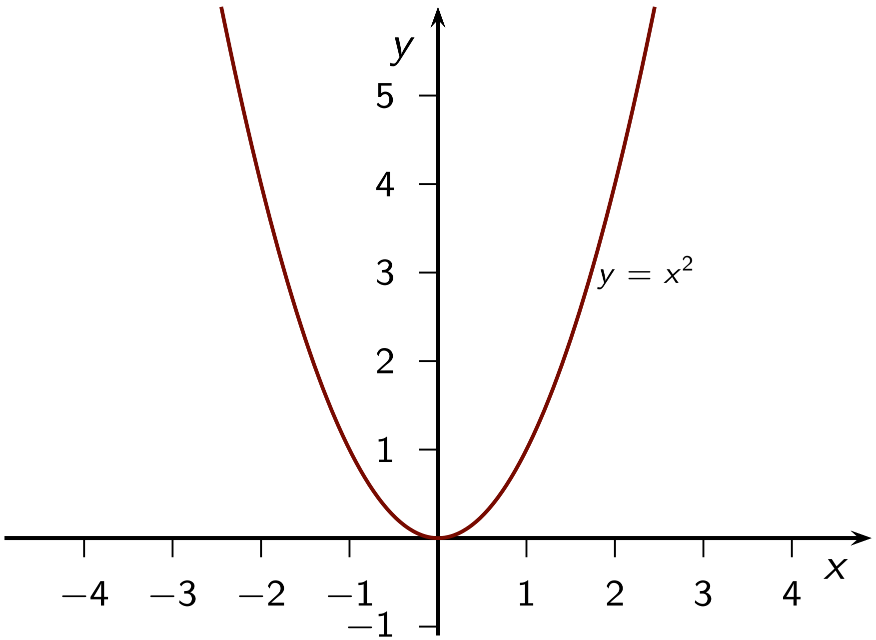
Abbildung: Skalierungen der Normalparabel

Verschieben der Normalparabel

Verschiebt man die Normalparabel um y_0 in y-Richtung, dann lautet der Funktionsterm der verschobenen Parabel

$$g(x) = x^2 + y_0$$

mit Wertebereich $\mathbb{W}_g = [y_0, \infty)$ und Scheitelpunkt $S(0, y_0)$. Für $y_0 > 0$ wird die Parabel nach oben, für $y_0 < 0$ nach unten verschoben.

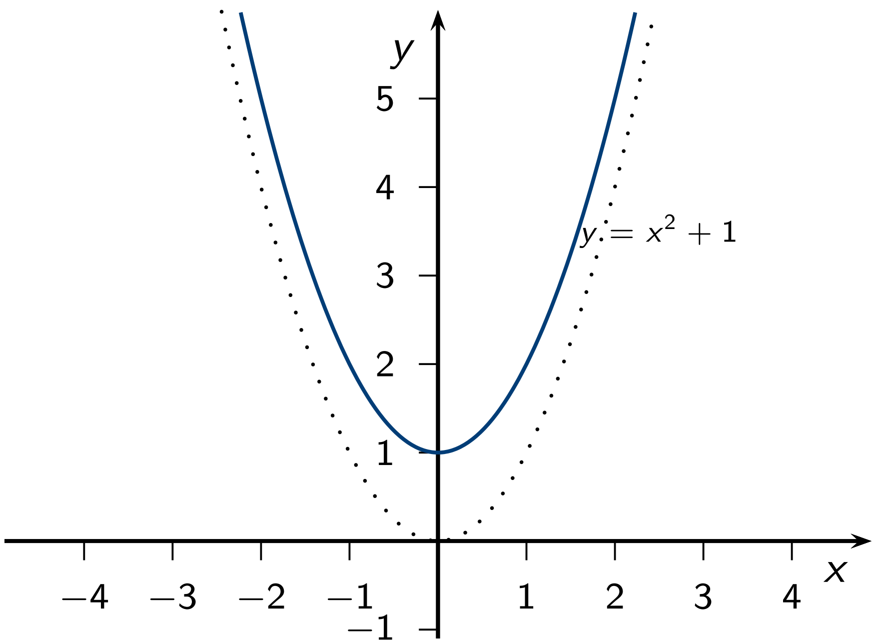


Verschieben der Normalparabel

Verschiebt man die Normalparabel um y_0 in y-Richtung, dann lautet der Funktionsterm der verschobenen Parabel

$$g(x) = x^2 + y_0$$

mit Wertebereich $\mathbb{W}_g = [y_0, \infty)$ und Scheitelpunkt $S(0, y_0)$. Für $y_0 > 0$ wird die Parabel nach oben, für $y_0 < 0$ nach unten verschoben.

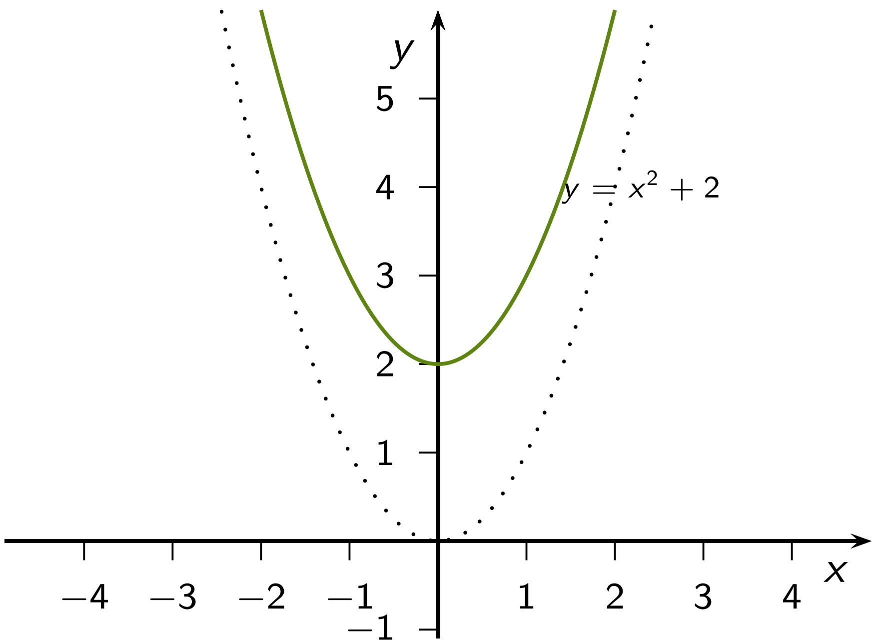


Verschieben der Normalparabel

Verschiebt man die Normalparabel um y_0 in y-Richtung, dann lautet der Funktionsterm der verschobenen Parabel

$$g(x) = x^2 + y_0$$

mit Wertebereich $\mathbb{W}_g = [y_0, \infty)$ und Scheitelpunkt $S(0, y_0)$. Für $y_0 > 0$ wird die Parabel nach oben, für $y_0 < 0$ nach unten verschoben.

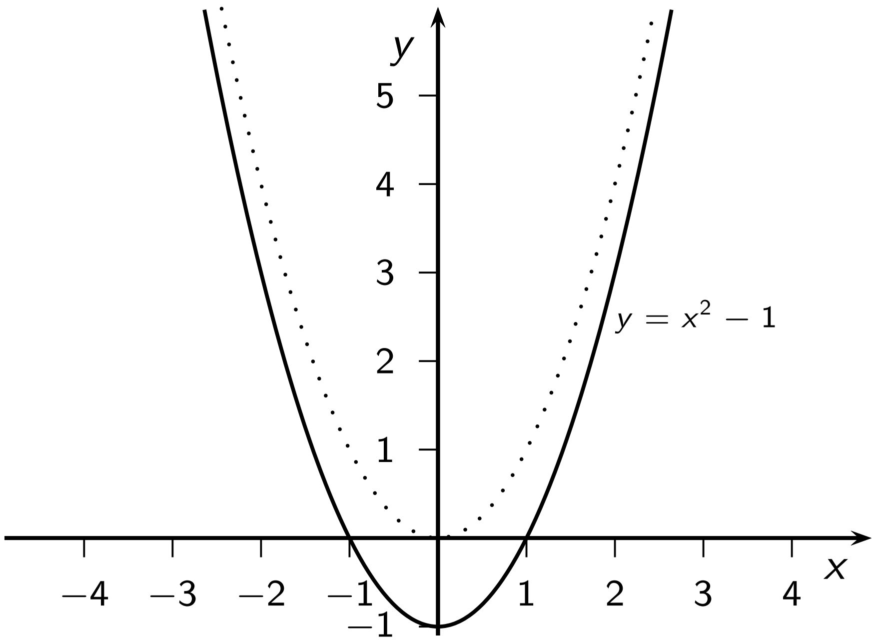


Verschieben der Normalparabel

Verschiebt man die Normalparabel um y_0 in y-Richtung, dann lautet der Funktionsterm der verschobenen Parabel

$$g(x) = x^2 + y_0$$

mit Wertebereich $\mathbb{W}_g = [y_0, \infty)$ und Scheitelpunkt $S(0, y_0)$. Für $y_0 > 0$ wird die Parabel nach oben, für $y_0 < 0$ nach unten verschoben.

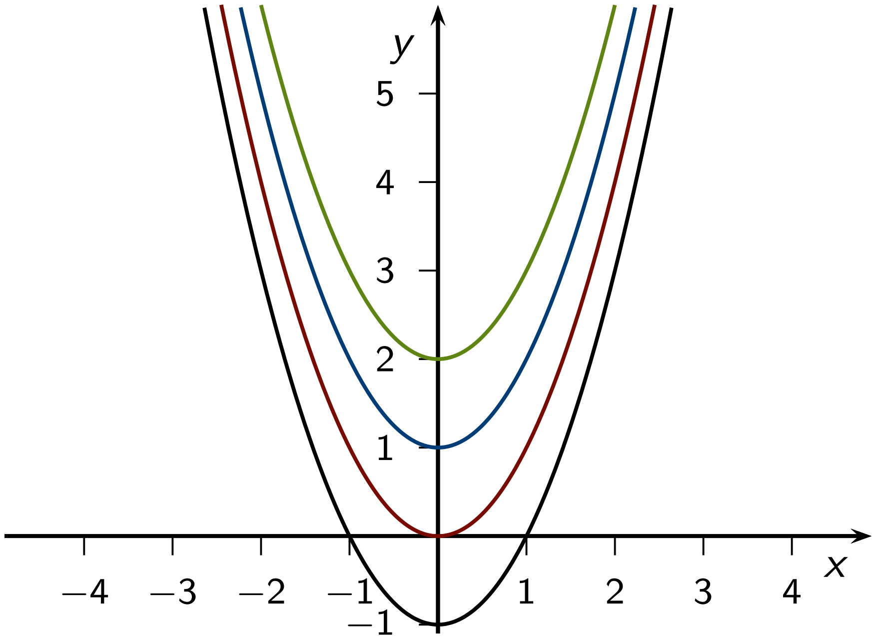


Verschieben der Normalparabel

Verschiebt man die Normalparabel um y_0 in y-Richtung, dann lautet der Funktionsterm der verschobenen Parabel

$$g(x) = x^2 + y_0$$

mit Wertebereich $\mathbb{W}_g = [y_0, \infty)$ und Scheitelpunkt $S(0, y_0)$. Für $y_0 > 0$ wird die Parabel nach oben, für $y_0 < 0$ nach unten verschoben.



Verschiebt man die Normalparabel um x_0 in x-Richtung, dann ergibt sich der Funktionsterm der verschobenen Parabel durch Ersetzen von x durch $x - x_0$, d. h.

$$g(x) = (x - x_0)^2$$

mit Wertebereich $\mathbb{W}_g = [0, \infty)$ und Scheitelpunkt $S(x_0, 0)$. Für $x_0 > 0$ wird die Parabel nach rechts, für $x_0 < 0$ nach links verschoben.

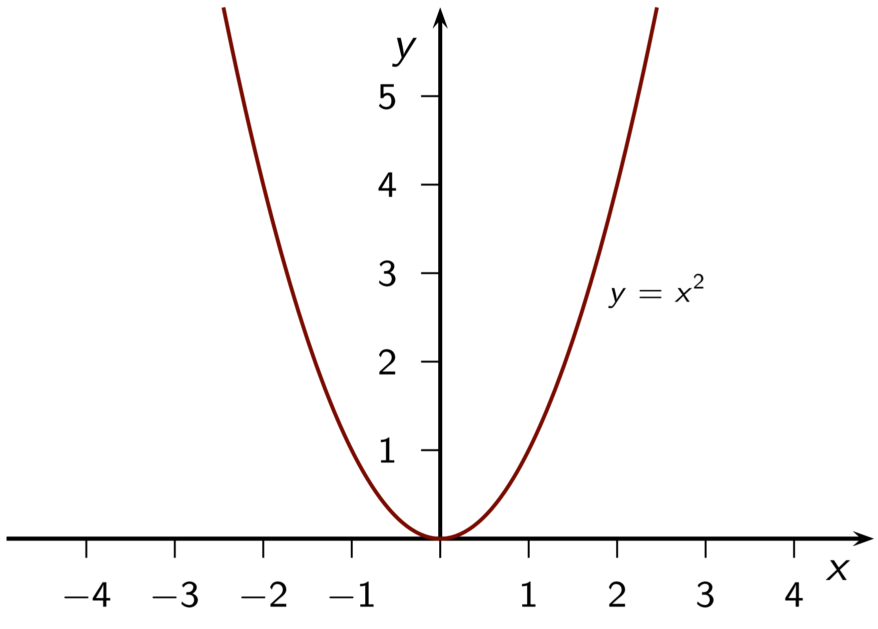


Abbildung: Verschiebungen der Normalparabel in x-Richtung

Verschiebt man die Normalparabel um x_0 in x-Richtung, dann ergibt sich der Funktionsterm der verschobenen Parabel durch Ersetzen von x durch $x - x_0$, d. h.

$$g(x) = (x - x_0)^2$$

mit Wertebereich $\mathbb{W}_g = [0, \infty)$ und Scheitelpunkt $S(x_0, 0)$. Für $x_0 > 0$ wird die Parabel nach rechts, für $x_0 < 0$ nach links verschoben.

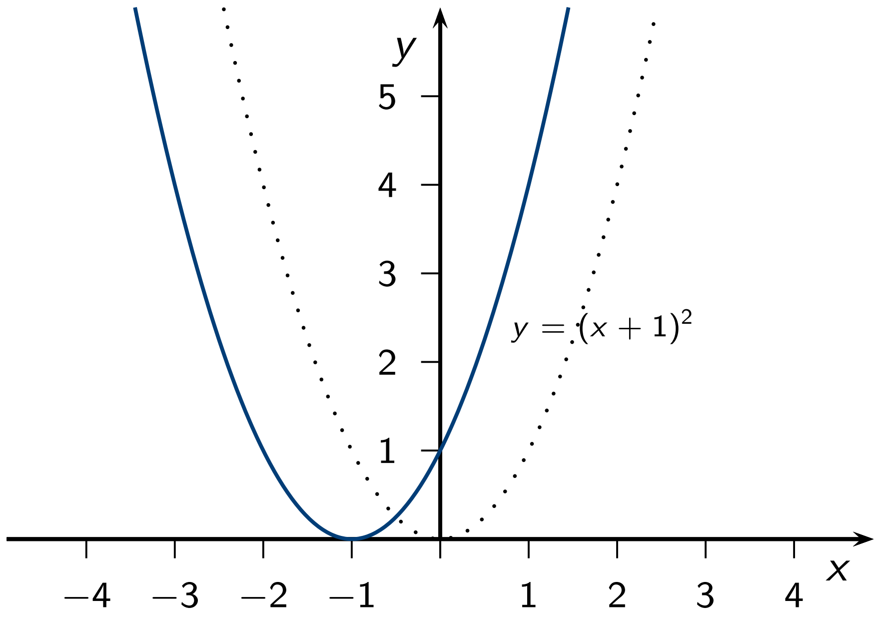


Abbildung: Verschiebungen der Normalparabel in x-Richtung

Verschiebt man die Normalparabel um x_0 in x-Richtung, dann ergibt sich der Funktionsterm der verschobenen Parabel durch Ersetzen von x durch $x - x_0$, d. h.

$$g(x) = (x - x_0)^2$$

mit Wertebereich $\mathbb{W}_g = [0, \infty)$ und Scheitelpunkt $S(x_0, 0)$. Für $x_0 > 0$ wird die Parabel nach rechts, für $x_0 < 0$ nach links verschoben.

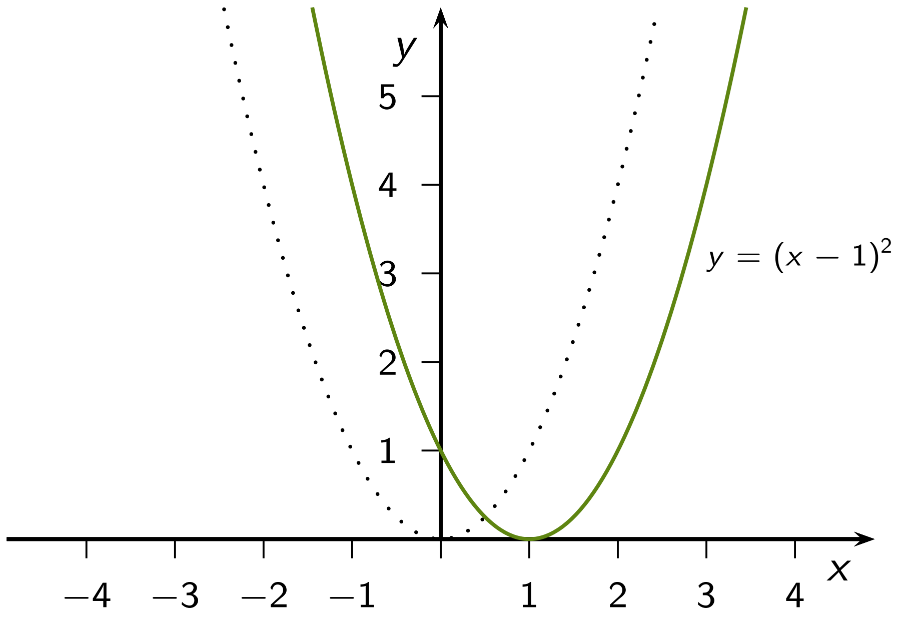


Abbildung: Verschiebungen der Normalparabel in x-Richtung

Verschiebt man die Normalparabel um x_0 in x-Richtung, dann ergibt sich der Funktionsterm der verschobenen Parabel durch Ersetzen von x durch $x - x_0$, d. h.

$$g(x) = (x - x_0)^2$$

mit Wertebereich $\mathbb{W}_g = [0, \infty)$ und Scheitelpunkt $S(x_0, 0)$. Für $x_0 > 0$ wird die Parabel nach rechts, für $x_0 < 0$ nach links verschoben.

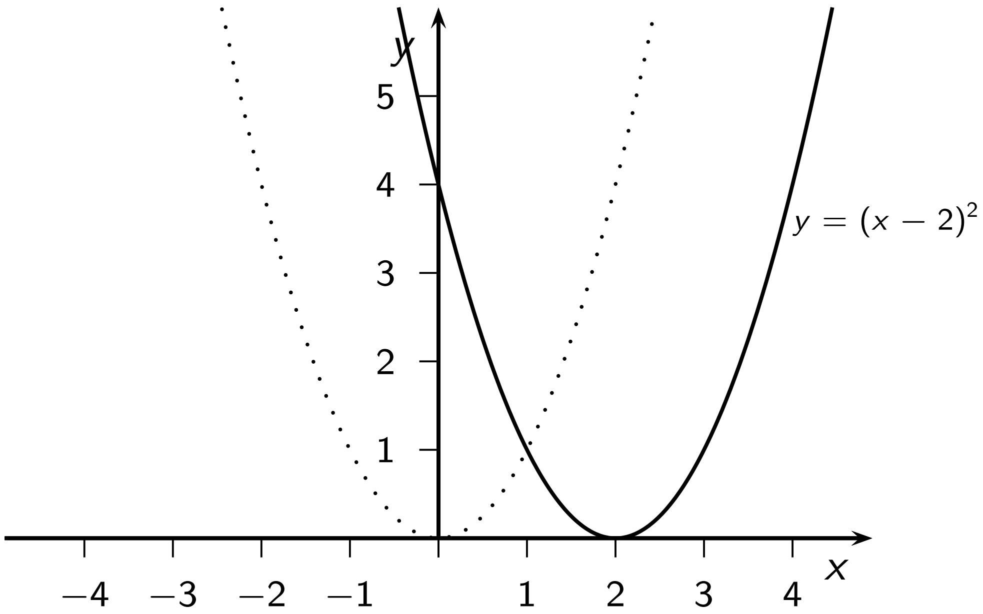


Abbildung: Verschiebungen der Normalparabel in x-Richtung

Verschiebt man die Normalparabel um x_0 in x-Richtung, dann ergibt sich der Funktionsterm der verschobenen Parabel durch Ersetzen von x durch $x - x_0$, d. h.

$$g(x) = (x - x_0)^2$$

mit Wertebereich $\mathbb{W}_g = [0, \infty)$ und Scheitelpunkt $S(x_0, 0)$. Für $x_0 > 0$ wird die Parabel nach rechts, für $x_0 < 0$ nach links verschoben.

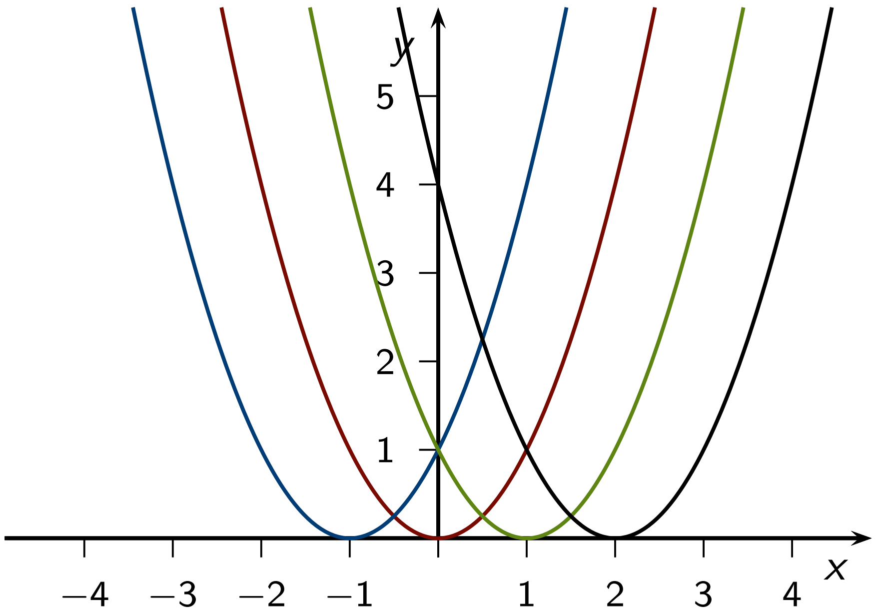


Abbildung: Verschiebungen der Normalparabel in x-Richtung

Eine Kombination von Stauchung bzw. Streckung, Verschiebung um y_0 in y-Richtung und Verschiebung um x_0 in x-Richtung liefert allgemein

$$f(x) = a(x - x_0)^2 + y_0 \qquad \text{(Scheitelpunktform).}$$

Eine Kombination von Stauchung bzw. Streckung, Verschiebung um y_0 in y-Richtung und Verschiebung um x_0 in x-Richtung liefert allgemein

$$f(x) = a(x - x_0)^2 + y_0 \qquad \text{(Scheitelpunktform).}$$

Durch Ausmultiplizieren und Umbenennen der Parameter erhält man

$$f(x) = ax^2 + bx + c \qquad \text{(allgemeine Parabelform).}$$

Eine Kombination von Stauchung bzw. Streckung, Verschiebung um y_0 in y-Richtung und Verschiebung um x_0 in x-Richtung liefert allgemein

$$f(x) = a(x - x_0)^2 + y_0 \qquad \text{(Scheitelpunktform).}$$

Durch Ausmultiplizieren und Umbenennen der Parameter erhält man

$$f(x) = ax^2 + bx + c \qquad \text{(allgemeine Parabelform).}$$

Hat die Parabel an den Stellen x_1 und x_2 Schnittpunkte mit der x-Achse, so lässt sich der zugehörige Funktionsterm auch in der Form

$$f(x) = a(x - x_1)(x - x_2) \qquad \text{(Nullstellenform)}$$

angeben.

Bemerkung 4.11

Man kann auch den Graphen jeder beliebigen anderen Funktion strecken bzw. stauchen, an der x-Achse spiegeln und verschieben.

- Streckung bzw. Stauchung mit dem Faktor $|a|$, Spiegelung an der x-Achse, falls $a < 0$ entspricht der Multiplikation des Funktionsterms mit dem Faktor a.
- Verschiebung um y_0 in y-Richung entspricht der Addition der Konstanten y_0 zum Funktionsterm.
- Verschiebung um x_0 in x-Richung entspricht dem Ersetzen von x durch $x - x_0$ im Funktionsterm.

Polynome

Lineare und quadratische Funktionen sind Spezialfälle einer allgemeineren Klasse von Funktionen, den Polynomen.

Definition 4.12

Eine Funktion $P : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ mit

$$P(x) = a_n\, x^n + a_{n-1}\, x^{n-1} + \cdots + a_1\, x + a_0$$

mit Konstanten $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_1, a_0 \in \mathbb{R}$, $a_n \neq 0$ heißt *Polynom* vom Grad n. Die Konstanten a_n, a_{n-1}, $\ldots$, a_1, a_0 heißen *Koeffizienten*, a_n Leitkoeffizient oder führender Koeffizient, a_0 konstanter Term oder Absolutglied. Weiter definiert man $P(x) = 0$ als das *Nullpolynom*.

Beispiel 4.13

- $P(x) = -0.5\,x^3 + 2\,x - 1$ ist ein Polynom vom Grad 3 mit den Koeffizienten $a_0 = -1,\ a_1 = 2,\ a_2 = 0,\ a_3 = -0.5$.

Beispiel 4.13

- $P(x) = -0.5\,x^3 + 2\,x - 1$ ist ein Polynom vom Grad 3 mit den Koeffizienten $a_0 = -1,\ a_1 = 2,\ a_2 = 0,\ a_3 = -0.5$.
- $P(x) = \frac{x^7+x^3+x}{125}$ ist ein Polynom vom Grad 7 mit den Koeffizienten $a_0 = a_2 = a_4 = a_5 = a_6 = 0$ und $a_1 = a_3 = a_7 = \frac{1}{125}$.

Beispiel 4.13

- $P(x) = -0.5\,x^3 + 2\,x - 1$ ist ein Polynom vom Grad 3 mit den Koeffizienten $a_0 = -1,\ a_1 = 2,\ a_2 = 0,\ a_3 = -0.5$.
- $P(x) = \frac{x^7+x^3+x}{125}$ ist ein Polynom vom Grad 7 mit den Koeffizienten $a_0 = a_2 = a_4 = a_5 = a_6 = 0$ und $a_1 = a_3 = a_7 = \frac{1}{125}$.
- $f(x) = 5\,x^{-3} + x^{-2} + 2$ ist *kein* Polynom.

Nullstellen von Polynomen

In vielen Problemstellungen ist es wichtig, etwas über die Anzahl und die Lage der Nullstellen, d. h. die Lösungen der Gleichung $P(x) = 0$ zu wissen.

Ein Polynom n-ten Grades besitzt höchstens n reelle Nullstellen.

Hat man eine Nullstelle x_1 von $P(x)$ gefunden, so lässt sich $P(x)$ auch schreiben als

$$P(x) = (x - x_1)\, P_{n-1}(x)$$

mit dem Linearfaktor $(x - x_1)$ und einem Polynom $P_{n-1}(x)$, das einen Grad niedriger ist als $P(x)$. Mit $P_{n-1}(x)$ kann man wieder genauso verfahren.

Für die ausführliche Untersuchung von Polynomen höheren als zweiten Grades ist man insbesondere an den folgenden Fragen interessiert:

- Wie kann man (falls vorhanden) Lösungen der Gleichung $P(x) = 0$ für ein Polynom n-ten Grades berechnen?
- Wie kann man, wenn man eine Nullstelle x_1 von $P(x)$ gefunden hat, das Polynom $P_{n-1}(x)$ bestimmen, so dass $P(x) = (x - x_1)P_{n-1}(x)$ gilt?

Ist $P(x)$ ein Polynom vom Grad 1 oder 2, so haben wir die Fragen bereits beantwortet. Für die Berechnung von Nullstellen von Polynomen dritten Grades gibt es zwar noch eine geschlossene Formel. Die ist aber ziemlich kompliziert. Für die Nullstellen von Polynomen höheren als dritten Grades gibt es keine geschlossene Formel mehr.

Beispiel 4.14 (Polynome mit ganzzahligen Koeffizienten)

Sei $P(x) = x^3 - 4\,x^2 + x + 6$ (Polynom dritten Grades mit ganzzahligen Koeffizienten).
Wenn $P(x)$ eine ganzzahlige Nullstelle x_1 besitzt, dann muss gelten:

$$\begin{aligned} x_1^3 - 4\,x_1^2 + x_1 + 6 = 0 \iff \quad & x_1^3 - 4\,x_1^2 + x_1 = -6 \\ \iff & x_1(x_1^2 - 4\,x_1 + 1) = -6 \end{aligned}$$

Wenn x_1 ganzzahlig ist, dann ist auch $x_1^2 - 4\,x_1 + 1$ ganzzahlig, also muss x_1 (positiver oder negativer) Teiler von -6 sein.
Die Teiler von -6 sind: $\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6$. Diese Werte kann man nun in $P(x)$ einsetzen und prüfen, ob es sich um eine Nullstelle handelt.

Beispiel 4.14 (fort.)

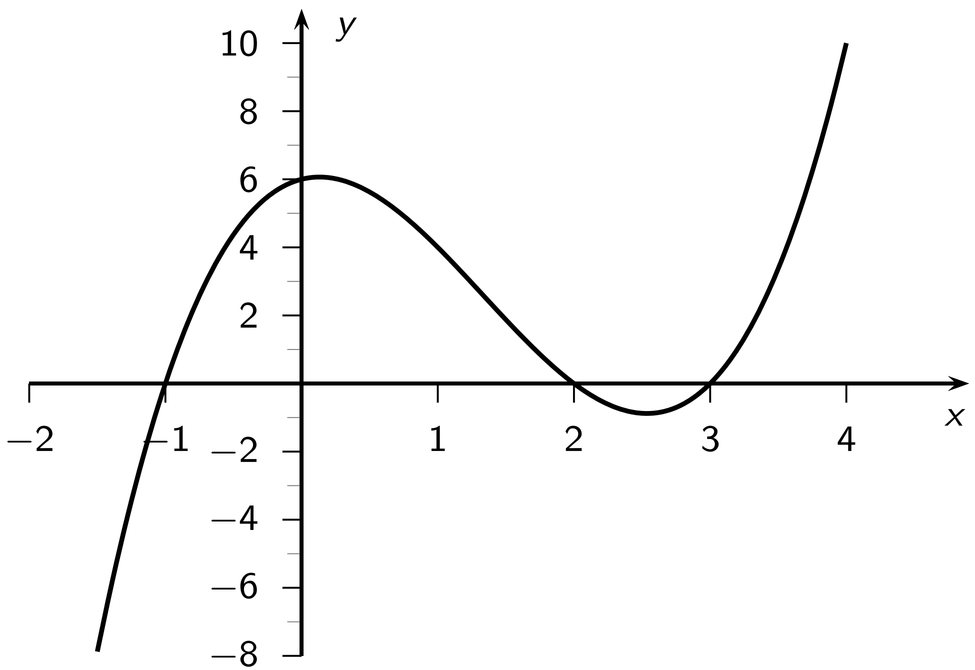
$P(1) = 4$, $P(-1) = 0$, also ist $x_1 = -1$ Nullstelle von $P(x)$.
$\Rightarrow$ $P(x) = (x+1)P_2(x)$, wobei $P_2(x)$ ein Polynom vom Grad 2 ist.

$$
\begin{array}{rrrrl}
(x^3 & - \; 4x^2 & + \; x & + \; 6\,) & : (x+1) = x^2 - 5x + 6 \\
x^3 & + \; x^2 & & & \\
\hline
 & -5x^2 & + \; x & + \; 6 & \\
 & -5x^2 & - \; 5x & & \\
\hline
 & & 6x & + \; 6 & \\
 & & 6x & + \; 6 & \\
\hline
 & & & 0 &
\end{array}
$$

Beispiel 4.14 (fort.)

Also gilt $P(x) = (x+1)(x^2 - 5x + 6)$. Mit Hilfe der *pq*-Formel findet man die Nullstellen der quadratischen Funktion $P_2(x) = x^2 - 5x + 6$, $x_2 = 2$ und $x_3 = 3$, die restlichen Nullstellen von $P(x)$.

$$P(x) = (x+1)(x-2)(x-3).$$



Beispiel 4.14 (fort.)

Da ein Polynomterm sein Vorzeichen nur an Nullstellen ändert, kann man aus dieser Darstellung z. B. mit Hilfe einer Vorzeichentabelle ermitteln, für welche Werte von x das Polynom $P(x)$ positive bzw. negative Werte annimmt.

Satz 4.15

Sei $P(x)$ ein Polynom mit ganzzahligen Koeffizienten. Dann gilt: Wenn $P(x)$ eine ganzzahlige Nullstelle besitzt, so ist diese Teiler des konstanten Terms a_0.

Beispiel 4.16

Sei $P(x) = x^5 - 3\,x^4 - 3\,x^3 + 9\,x^2 - 4\,x + 12$ (Polynom fünften Grades mit ganzzahligen Koeffizienten).
Die Teiler des Absolutgliedes 12 sind: $\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \pm 6, \pm 12$. Diese Werte kann man nun in $P(x)$ einsetzen und prüfen, ob es sich um eine Nullstelle handelt.
$P(1) = 12$, $P(-1) = 24$, $P(2) = 0$ also ist $x_1 = 2$ Nullstelle von $P(x)$.

Beispiel 4.16 (fort.)

Also ist $P(x) = (x-2)P_4(x)$, wobei $P_4(x)$ ein Polynom vom Grad 4 ist.

$$
\begin{array}{rrrrrrl}
(x^5 & -\ 3x^4 & -\ 3x^3 & +\ 9x^2 & -\ 4x & +\ 12\ ) : (x-2) = x^4 - x^3 - 5\,x^2 - x - 6 \\
x^5 & -\ 2x^4 & & & & \\
\hline
 & -x^4 & -\ 3x^3 & +\ 9x^2 & -\ 4x & +\ 12 \\
 & -x^4 & +\ 2x^3 & & & \\
\hline
 & & -5x^3 & +\ 9x^2 & -\ 4x & +\ 12 \\
 & & -5x^3 & +\ 10x^2 & & \\
\hline
 & & & -x^2 & -\ 4x & +\ 12 \\
 & & & -x^2 & +\ 2x & \\
\hline
 & & & & -6x & +\ 12 \\
 & & & & -6x & +\ 12 \\
\hline
 & & & & & 0
\end{array}
$$

Beispiel 4.16 (fort.)

Also ist

$$P(x) = (x-2)\underbrace{(x^4 - x^3 - 5\,x^2 - x - 6)}_{P_4(x)}.$$

Die Teiler des Absolutgliedes -6 von $P_4(x)$ sind: $\pm1, \pm2, \pm3, \pm6$, wobei wir ±1 nicht mehr probieren müssen.

$$\begin{aligned} P_4(2) &= -20 \\ P_4(-2) &= 0 \qquad \text{also ist } x_2 = -2 \text{ Nullstelle von } P_4(x). \end{aligned}$$

Beispiel 4.16 (fort.)

Also ist $P_4(x) = (x+2)P_3(x)$ bzw. $P(x) = (x-2)(x+2)P_3(x)$, wobei $P_3(x)$ ein Polynom vom Grad 3 ist,

$$
\begin{array}{rrrrrl}
(x^4 - & x^3 & -5x^2 - & x & -6\,) : (x+2) = x^3 - 3\,x^2 + x - 3 \\
x^4 + & 2x^3 & & & \\
\hline
& -3x^3 & -5x^2 - & x & -6 \\
& -3x^3 & -6x^2 & & \\
\hline
& & x^2 - & x & -6 \\
& & x^2 + & 2x & \\
\hline
& & & -3x & -6 \\
& & & -3x & -6 \\
\hline
& & & & 0
\end{array}
$$

Beispiel 4.16 (fort.)

Also ist

$$P(x) = (x-2)(x+2)\underbrace{(x^3 - 3\,x^2 + x - 3)}_{P_3(x)}\;.$$

Die Teiler des Absolutgliedes -3 von $P_3(x)$ sind: $\pm 1, \pm 3$.
$P_3(-3) = -25$, $P_3(3) = 0$ also ist $x_3 = 3$ Nullstelle von $P_3(x)$.
Also ist $P_3(x) = (x-3)P_2(x)$ bzw. $P(x) = (x-2)(x+2)(x-3)P_2(x)$, wobei $P_2(x)$ ein Polynom vom Grad 2 ist.

$$\begin{array}{l}
(x^3 - 3x^2 + x - 3\,) : (x-3) = x^2 + 1 \\
\underline{\;x^3 - 3x^2 \qquad\qquad\quad} \\
\qquad\qquad\qquad\; x - 3 \\
\qquad\qquad\qquad\; \underline{x - 3} \\
\qquad\qquad\qquad\qquad 0
\end{array}$$

Beispiel 4.16 (fort.)

Also ist

$$P(x) = (x-2)(x+2)(x-3)\underbrace{(x^2+1)}_{P_2(x)} .$$

Da $P_2(x)$ keine reellen Nullstellen besitzt, ist die vollständige Faktorisierung von $P(x)$ somit

$$P(x) = (x-2)(x+2)(x-3)(x^2+1) .$$

Die reellen Nullstellen sind $x_1 = 2$, $x_2 = -2$ und $x_3 = 3$. Auch hier kann man aus dieser Darstellung wieder mit Hilfe einer Vorzeichentabelle ermitteln, für welche Werte von x das Polynom $P(x)$ positive bzw. negative Werte annimmt.

Beispiel 4.16 (fort.)

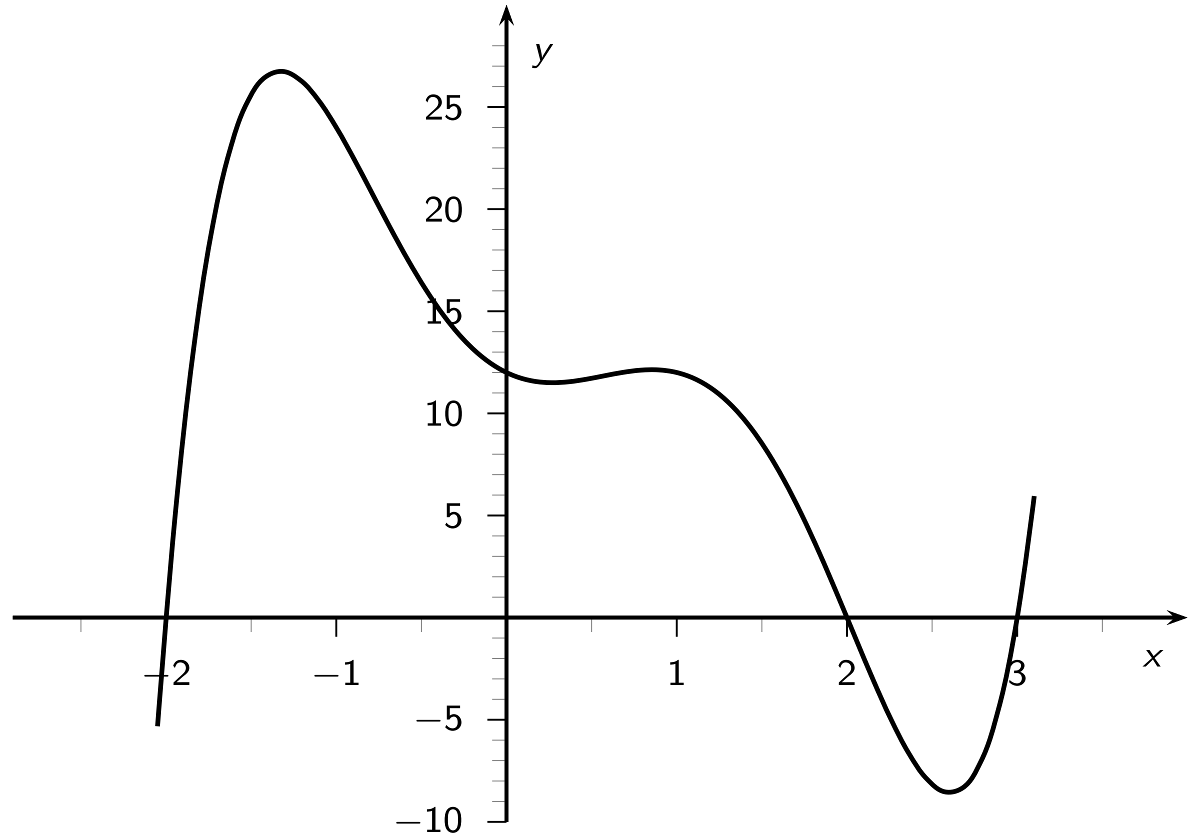


Abbildung: $P(x) = x^5 - 3\,x^4 - 3\,x^3 + 9\,x^2 - 4\,x + 12 = (x-2)(x+2)(x-3)(x^2+1)$ (Beispiel 4.16)

Beispiel 4.17

Sei $P(x) = x^4 - 32x^3 + 366x^2 - 1760x + 3025$ (Polynom vierten Grades mit ganzzahligen Koeffizienten).
Die Teiler des Absolutgliedes 3025 sind: ± 1, ± 5, ± 11, ± 25, ± 55, ± 121, ± 275, ± 605 und ± 3025. Diese Werte kann man nun in $P(x)$ einsetzen und prüfen, ob es sich um eine Nullstelle handelt.
$P(1) = 1600$, $P(-1) = 5184$, $P(5) = 0$ also ist $x_1 = 5$ Nullstelle von $P(x)$.

Beispiel 4.17 (fort.)

Also ist $P(x) = (x-5)P_3(x)$, wobei $P_3(x)$ ein Polynom vom Grad 3 ist.

$$
\begin{array}{l}
(x^4 - 32x^3 + 366x^2 - 1760x + 3025) : (x-5) = x^3 - 27x^2 + 231x - 605 \\
\underline{x^4 - 5x^3} \\
\quad -27x^3 + 366x^2 - 1760x + 3025 \\
\quad \underline{-27x^3 + 135x^2} \\
\qquad 231x^2 - 1760x + 3025 \\
\qquad \underline{231x^2 - 1155x} \\
\qquad\quad -605x + 3025 \\
\qquad\quad \underline{-605x + 3025} \\
\qquad\qquad 0
\end{array}
$$

Beispiel 4.17 (fort.)

Also ist

$$P(x) = (x-5)\underbrace{\left(x^3 - 27\,x^2 + 231\,x - 605\right)}_{P_3(x)}.$$

Die Teiler des Absolutgliedes -605 von $P_3(x)$ sind:
$\pm 1, \pm 5, \pm 11, \pm 55, \pm 121, \pm 605$, wobei wir ± 1 nicht mehr probieren müssen.
$P_3(5) = 0$, also ist 5 Nullstelle von $P_3(x)$ (doppelte Nullstelle von $P(x)$).

Beispiel 4.17 (fort.)

$\Rightarrow$ $P_3(x) = (x-5)P_2(x)$ bzw. $P(x) = (x-5)^2 P_2(x)$, wobei $P_2(x)$ ein Polynom vom Grad 2 ist.

$$
\begin{array}{rrrrl}
(x^3 & -27x^2 & +231x & -605) & : (x-5) = x^2 - 22x + 121 \\
x^3 & -5x^2 & & & \\
\hline
 & -22x^2 & +231x & -605 & \\
 & -22x^2 & +110x & & \\
\hline
 & & 121x & -605 & \\
 & & 121x & -605 & \\
\hline
 & & & 0 &
\end{array}
$$

Also ist

$$P(x) = (x-5)^2 \underbrace{(x^2 - 22x + 121)}_{P_2(x)} = (x-5)^2 \underbrace{(x-11)^2}_{P_2(x)} \qquad \text{(binomische Formel).}$$

Beispiel 4.17 (fort.)

Die vollständige Faktorisierung von $P(x)$ ist somit

$$P(x) = (x-5)^2(x-11)^2 .$$

Die doppelten reellen Nullstellen sind $x_1 = 5$ und $x_2 = 11$. Da Quadrate stets nichtnegativ sind, können wir aus dieser Darstellung ablesen, dass $P(x) \geq 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

Beispiel 4.17 (fort.)

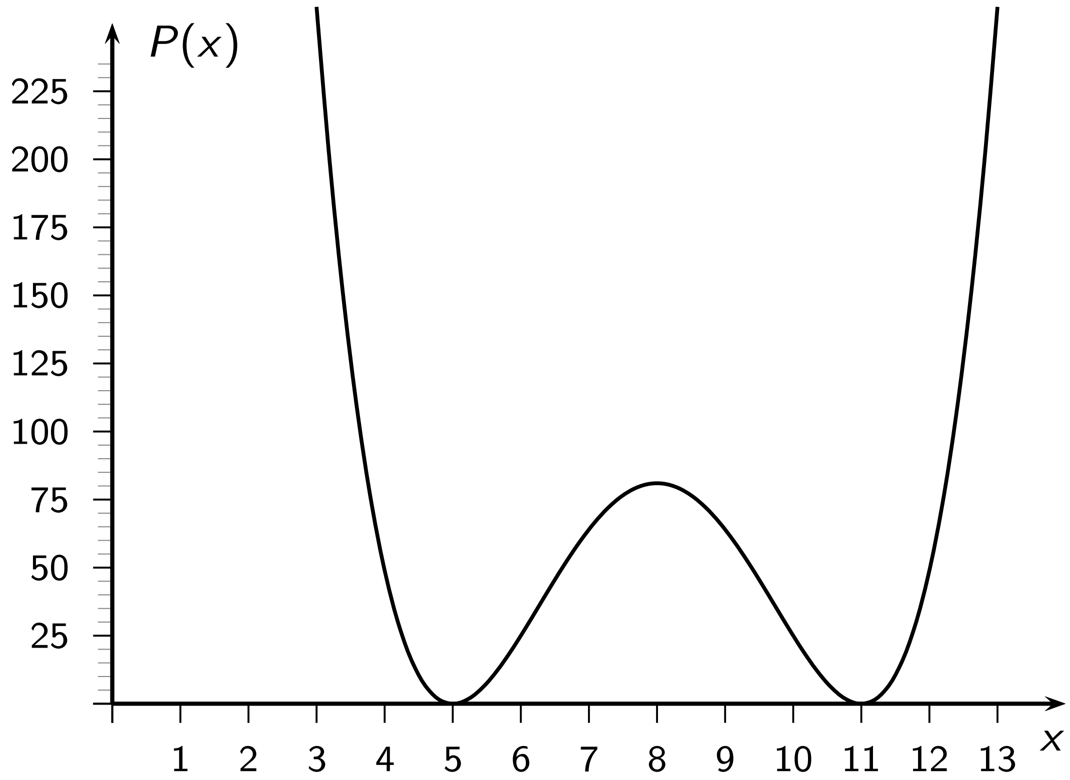


Abbildung: Funktionsgraph des Polynoms
$P(x) = x^4 - 32x^3 + 366\,x^2 - 1760\,x + 3025 = (x-5)^2(x-11)^2$ (Beispiel 4.17)

Gebrochenrationale Funktionen

Definition 4.18

Seien

$$P(x) = a_n\, x^n + a_{n-1}\, x^{n-1} + \ldots + a_1\, x + a_0$$

und

$$Q(x) = b_m\, x^m + b_{m-1}\, x^{m-1} + \ldots + b_1\, x + b_0$$

Polynome vom Grad n bzw. m, wobei $Q(x)$ nicht das *Nullpolynom* sein darf. Dann heißt

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$$

gebrochenrationale Funktion mit dem Definitionsbereich

$$\mathbb{D}_f = \mathbb{R} \setminus \{x : \; Q(x) = 0\} \; .$$

Üblicherweise bringt man rationale Funktionen auf eine gekürzte Form, indem man die Faktorisierungen von $P(x)$ und $Q(x)$ bestimmt und gemeinsame Faktoren kürzt.

Haben $P(x)$ und $Q(x)$ gemeinsame Nullstellen, so kann man zugehörige Linearfaktoren kürzen. Verschwindet dadurch diese Nullstelle im Nenner so spricht man von einer *behebbaren Definitionslücke* von f. Im Funktionsgraph befindet sich an dieser Stelle eine Lücke, da die Funktion f hier nicht definiert ist.

Liegt die rationale Funktion $f(x) = {}^{\widetilde{P}(x)}/_{\widetilde{Q}(x)}$ in gekürzter Form vor, dann sind die Nullstellen von $\widetilde{P}(x)$ die Nullstellen von f und die Nullstellen von $\widetilde{Q}(x)$ die *Polstellen* von f. An diesen nicht-behebbaren Definitionslücken hat der Graph der Funktion eine senkrechte Asymptote (f strebt gegen $+\infty$ oder $-\infty$).

Beispiel 4.19

Die rationale Funktion

$$f(x) = \frac{x^3 - 3x - 2}{x^3 - x^2 - x + 1} = \frac{(x+1)^2(x-2)}{(x+1)(x-1)^2}$$

hat den Definitionsbereich $\mathbb{D}_f = \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$. Kürzen liefert

$$g(x) = \frac{(x+1)(x-2)}{(x-1)^2}$$

mit dem Definitionsbereich $\mathbb{D}_g = \mathbb{R} \setminus \{1\}$. $g(x)$ besitzt Nullstellen für $x = -1$ und $x = 2$ und eine Polstelle für $x = 1$.
Für $x \in \mathbb{D}_f$ gilt $f(x) = g(x)$.

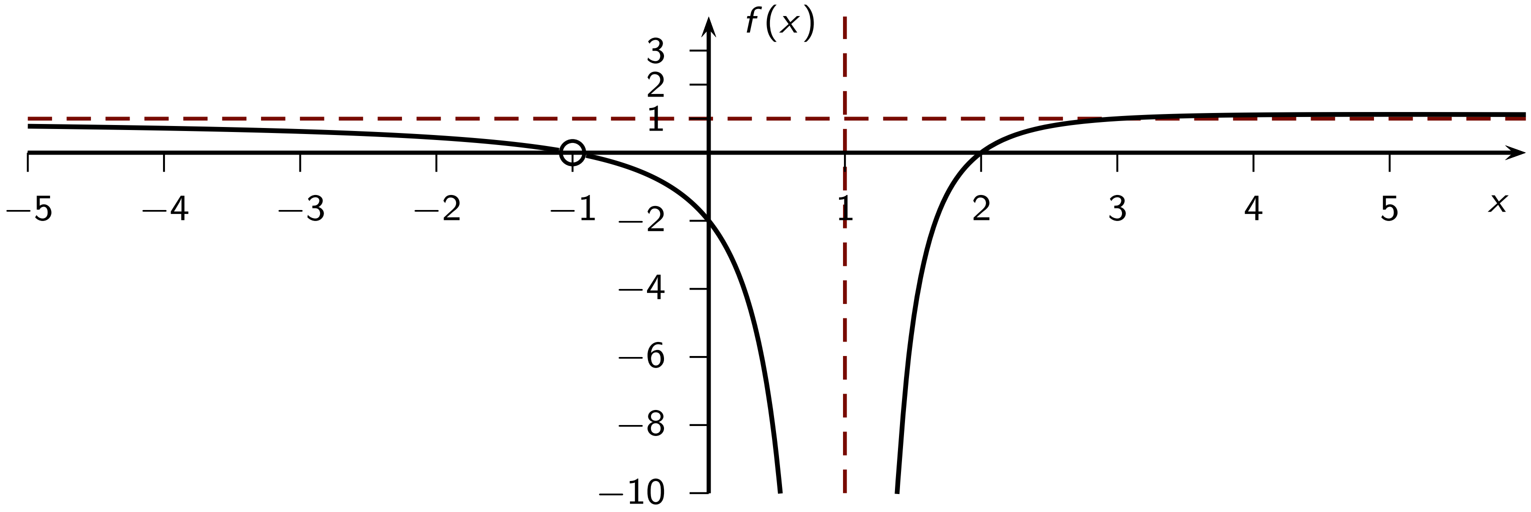


Abbildung: $f(x) = \frac{x^3 - 3x - 2}{x^3 - x^2 - x + 1}$ (Beispiel 4.19)

Satz 4.20

Ist der Grad n des Zählerpolynoms größer oder gleich dem Grad m des Nennerpolynoms, so lässt sich $f(x)$ schreiben als

$$f(x) = N(x) + \frac{R(x)}{Q(x)},$$

wobei $N(x)$ ein Polynom vom Grad $n - m$ und $R(x)$ ein Polynom vom Höchstgrad $m - 1$ bezeichnet. Die Polynome $N(x)$ und $R(x)$ erhält man durch Polynomdivision.
Für große Werte von $|x|$ ist $f(x) \approx N(x)$; $N(x)$ heißt *Asymptote*.

Beispiel 4.21

Wir betrachten die rationale Funktion

$$f(x) = \frac{x^3 - 2x + 3}{x^2 - x - 2} \quad \text{mit } \mathbb{D}_f = \mathbb{R} \setminus \{-1, 2\}\,.$$

Polynomdivision (mit Rest) liefert

$$\begin{array}{rrrrrrr}
(x^3 & & & - & 2x & + & 3) \\
x^3 & - & x^2 & - & 2x & & \\
\hline
 & & x^2 & & & + & 3 \\
 & & x^2 & - & x & - & 2 \\
\hline
 & & & & x & + & 5
\end{array} \quad : (x^2 - x - 2) = x + 1 + \frac{x+5}{x^2-x-2}$$

d. h.

$$f(x) = x + 1 + \frac{x + 5}{x^2 - x - 2}$$

$N(x) = x + 1$ ist Asymptote von $f(x)$.

Beispiel 4.21 (fort.)

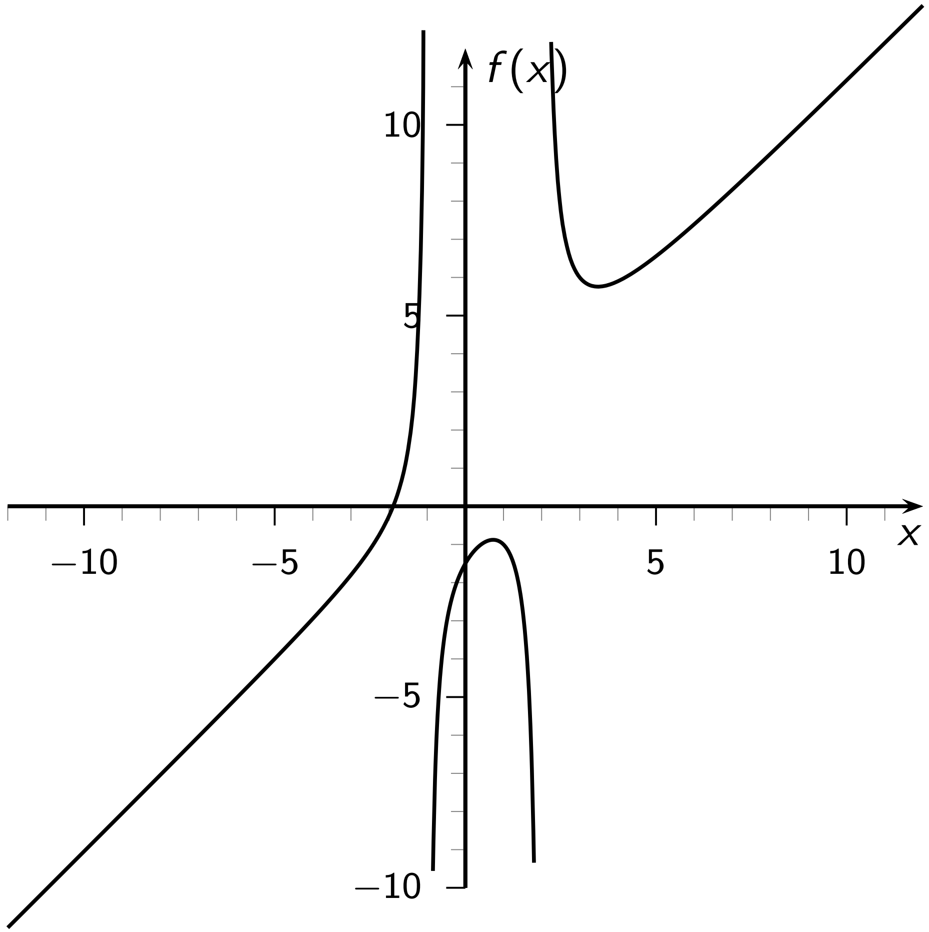


Abbildung: Rationale Funktion $f(x) = x + 1 + \frac{x+5}{x^2-x-2}$ und ihre Asymptote $N(x) = x + 1$ (Beispiel 4.21)

Beispiel 4.21 (fort.)

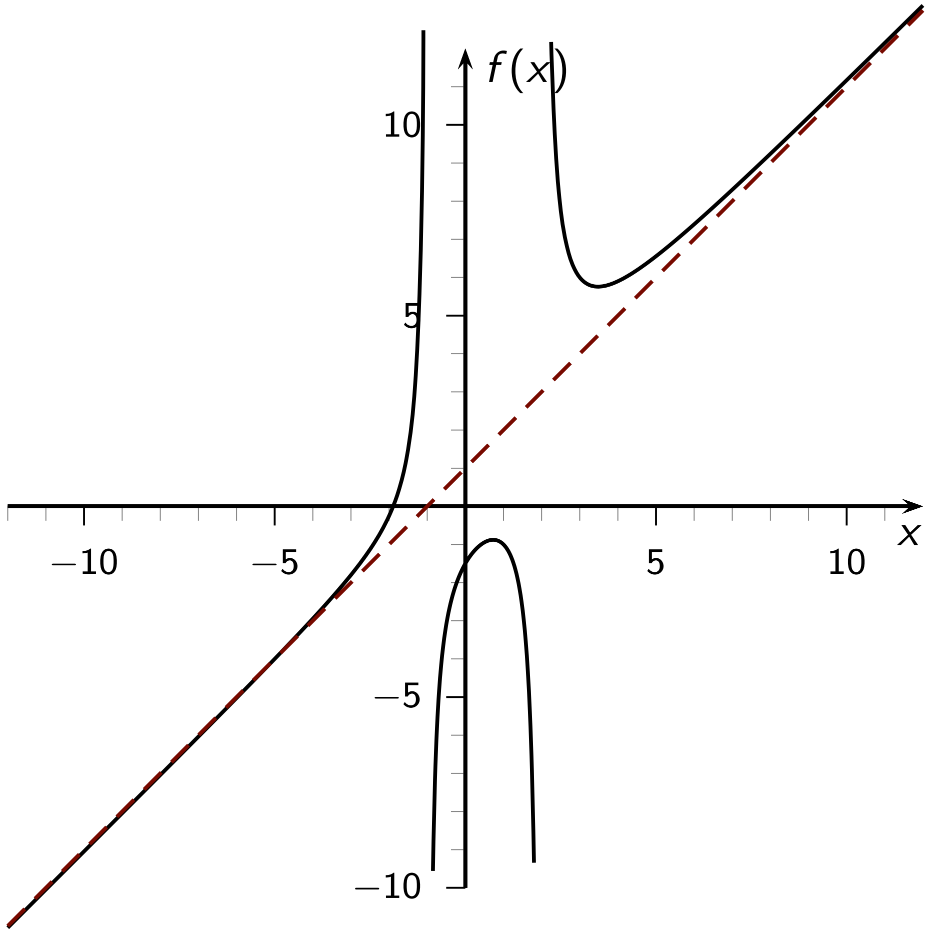


Abbildung: Rationale Funktion $f(x) = x + 1 + \frac{x+5}{x^2-x-2}$ und ihre Asymptote $N(x) = x + 1$ (Beispiel 4.21)

Trigonometrische Funktionen

Definition 4.22

Eine Funktion $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ heißt periodisch, falls für eine feste reelle Zahl T gilt, dass

$$f(x + T) = f(x) \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$

T heißt dann Periodenlänge der Funktion f.

Bemerkung 4.23

Bei den trigonometrischen Funktionen ist die Periodizität darin begründet, dass man zu einem Winkel beliebige, ganzzahlige Vielfache von 2π (360°) addieren kann und geometrisch wieder den selben Winkel erhält.

Eigenschaften trigonometrischer Funktionen

$f(x) = \sin x$

$\mathbb{D} = \mathbb{R}$
$\mathbb{W} = [-1, 1]$
Periodenlänge: 2π
Nullstellen:
$x_k = k\pi, \; k \in \mathbb{Z}$
Symmetrie: ungerade

$f(x) = \cos x$

$\mathbb{D} = \mathbb{R}$
$\mathbb{W} = [-1, 1]$
Periodenlänge: 2π
Nullstellen:
$x_k = \frac{\pi}{2} + k\pi, \; k \in \mathbb{Z}$
Symmetrie: gerade

$f(x) = \tan x$

$\mathbb{D} = \mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$
$\mathbb{W} = \mathbb{R}$
Periodenlänge: π
Nullstellen:
$x_k = k\pi, \; k \in \mathbb{Z}$
Symmetrie: ungerade

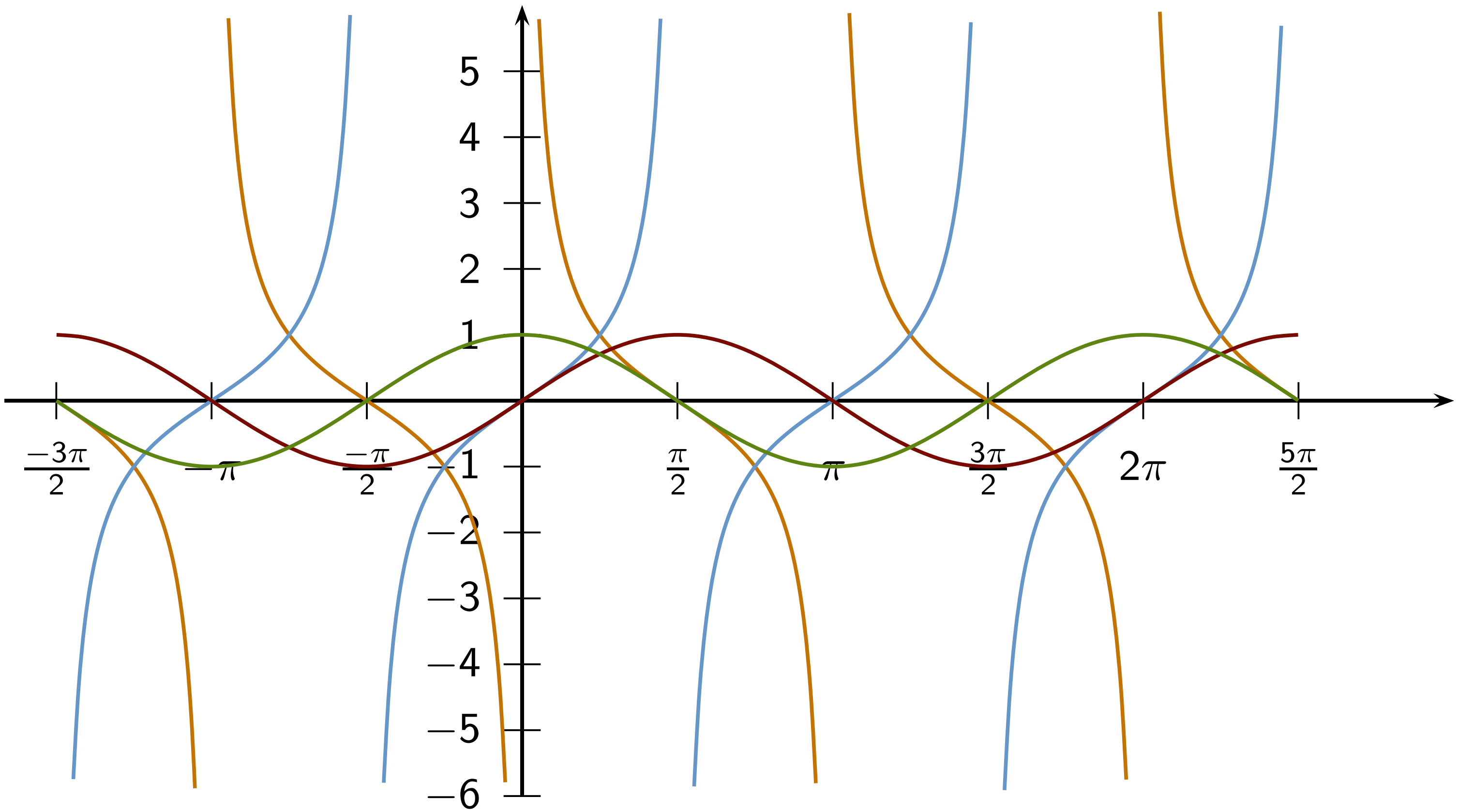


Abbildung: Graphen der trigonometrischen Funktionen Sinus (●), Kosinus (●), Tangens (●) und Kotangens (●)

Exponentialfunktion

Definition 4.24

Sei $a > 0$. Die Funktion $f(x) = a^x$ mit $\mathbb{D}_f = \mathbb{R}$ heißt *Exponentialfunktion*. Dabei heißt a *Basis* und x *Exponent*.

Bemerkung 4.25

Eine besondere Rolle spielt die Basis $e \approx 2,71828182846$, die *Eulersche Zahl*. e ist eine irrationale Zahl, kann also weder als Bruch noch als Dezimalbruch exakt dargestellt werden. Die zugehörige Exponentialfunktion nennt man auch die *e-Funktion*.

Eigenschaften der Exponentialfunktionen

$f(x) = a^x \ (0 < a < 1)$

$\mathbb{D} = \mathbb{R}$
$\mathbb{W} = \mathbb{R}_+$
keine Nullstellen
streng monoton fallend

$f(x) = a^x \ (a > 1)$

$\mathbb{D} = \mathbb{R}$
$\mathbb{W} = \mathbb{R}_+$
keine Nullstellen
streng monoton steigend

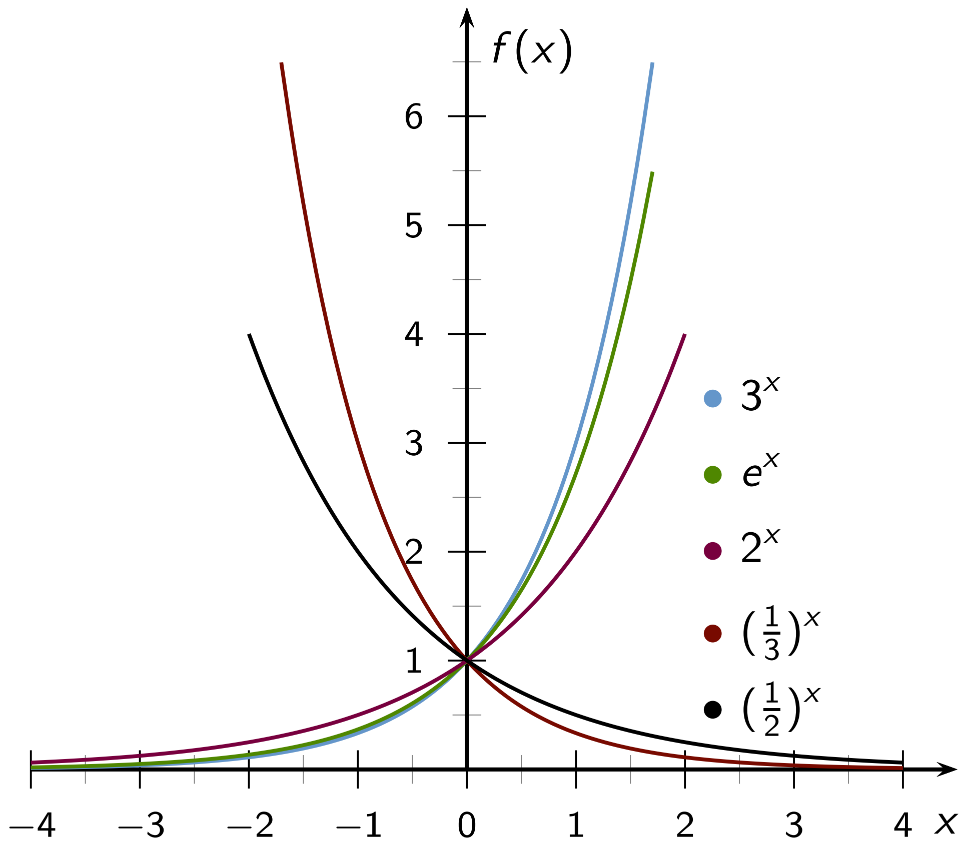


Abbildung: Exponentialfunktionen

Bemerkung 4.26

Der Graph der Funktion $g(x) = \left(\frac{1}{a}\right)^x = a^{-x}$ ist die Spiegelung der des Graphen von $f(x) = a^x$ an der y-Achse.

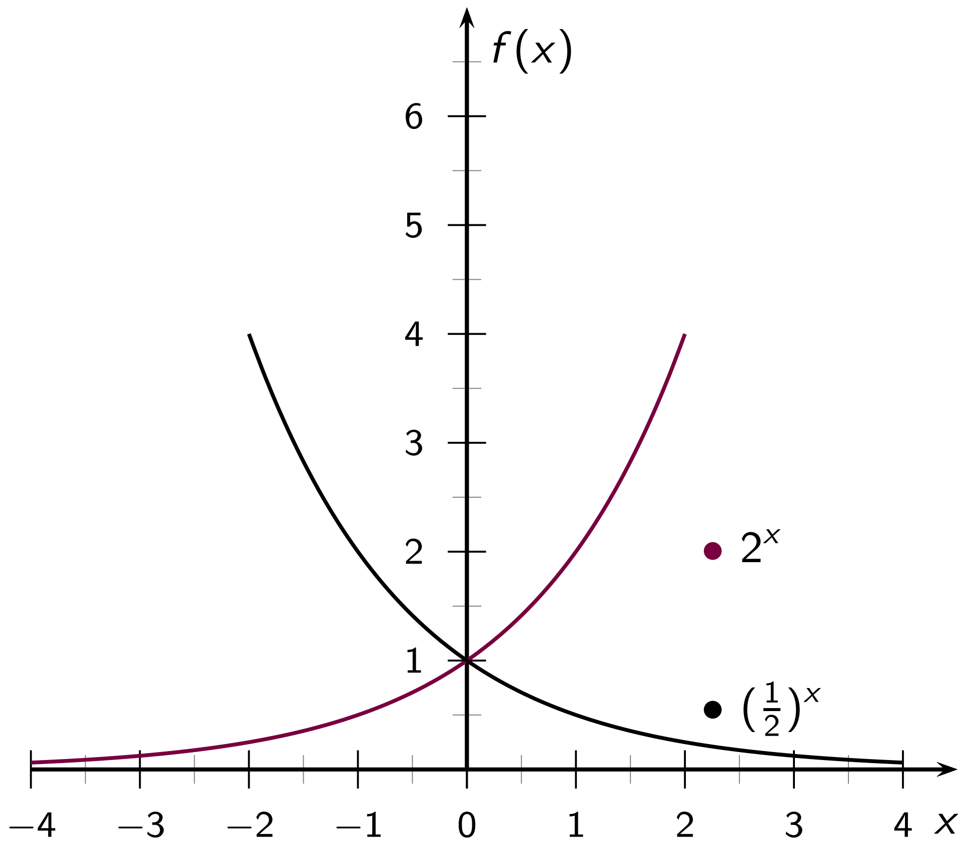


Abbildung: Exponentialfunktionen

Logarithmusfunktion

Definition 4.27

Sei $a \in \mathbb{R}_+ \setminus \{1\}$. Die Funktion $f(x) = \log_a x$ heißt *Logrithmusfunktion zur Basis a*.

Die Logarithmusfunktion $f(x) = \log_a x$ ist die Umkehrfunktion der Exponentialfunktion $g(x) = a^x$.

Eigenschaften der Logarithmusfunktionen

$f(x) = \log_a x \;\; (0 < a < 1)$

$\mathbb{D} = \mathbb{R}_+$
$\mathbb{W} = \mathbb{R}$
Nullstelle $x_0 = 1$
streng monoton fallend

$f(x) = \log_a x \;\; (a > 1)$

$\mathbb{D} = \mathbb{R}_+$
$\mathbb{W} = \mathbb{R}$
Nullstelle $x_0 = 1$
streng monoton steigend

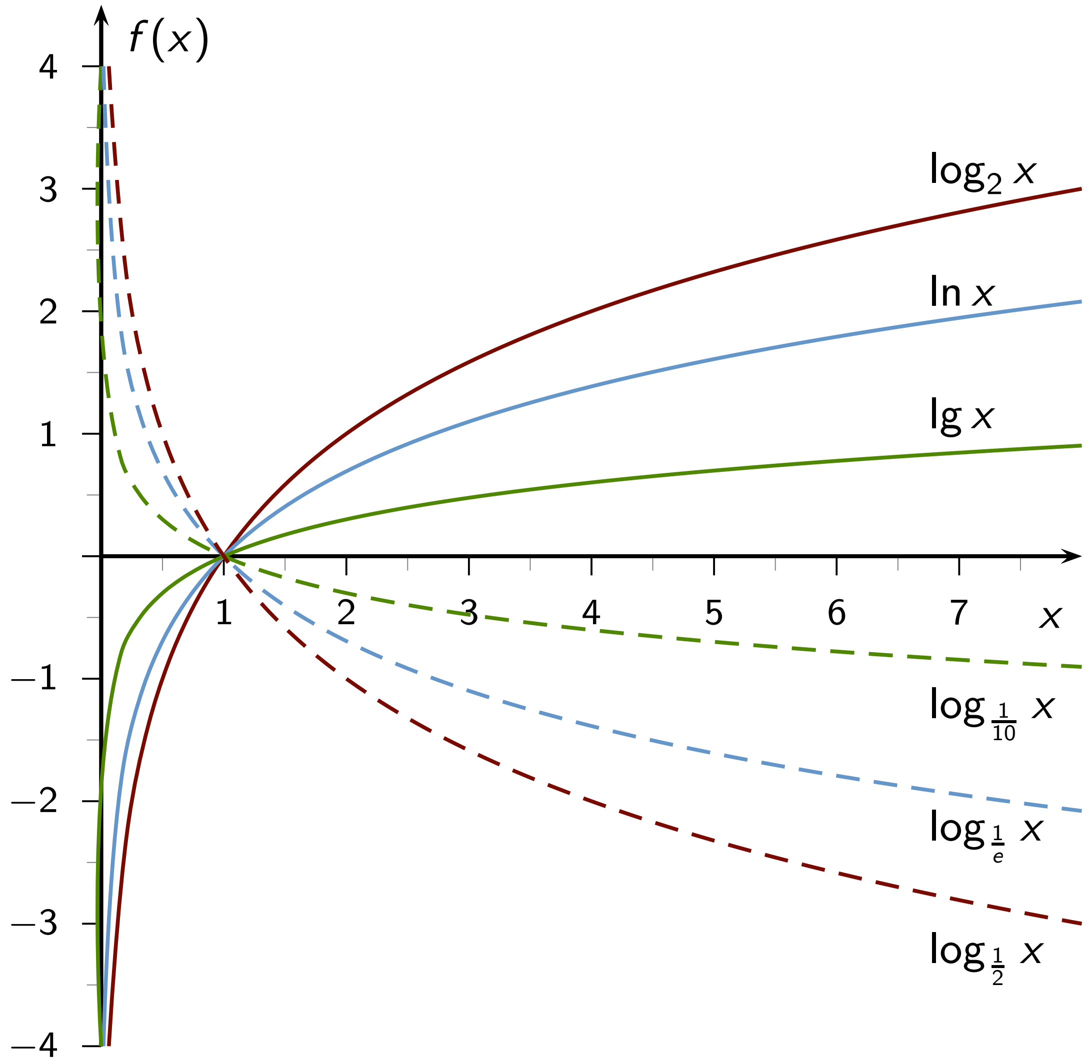


Abbildung: Logarithmusfunktionen für die Basen: $\frac{1}{10}$, $\frac{1}{e}$, $\frac{1}{2}$, 2, e und 10

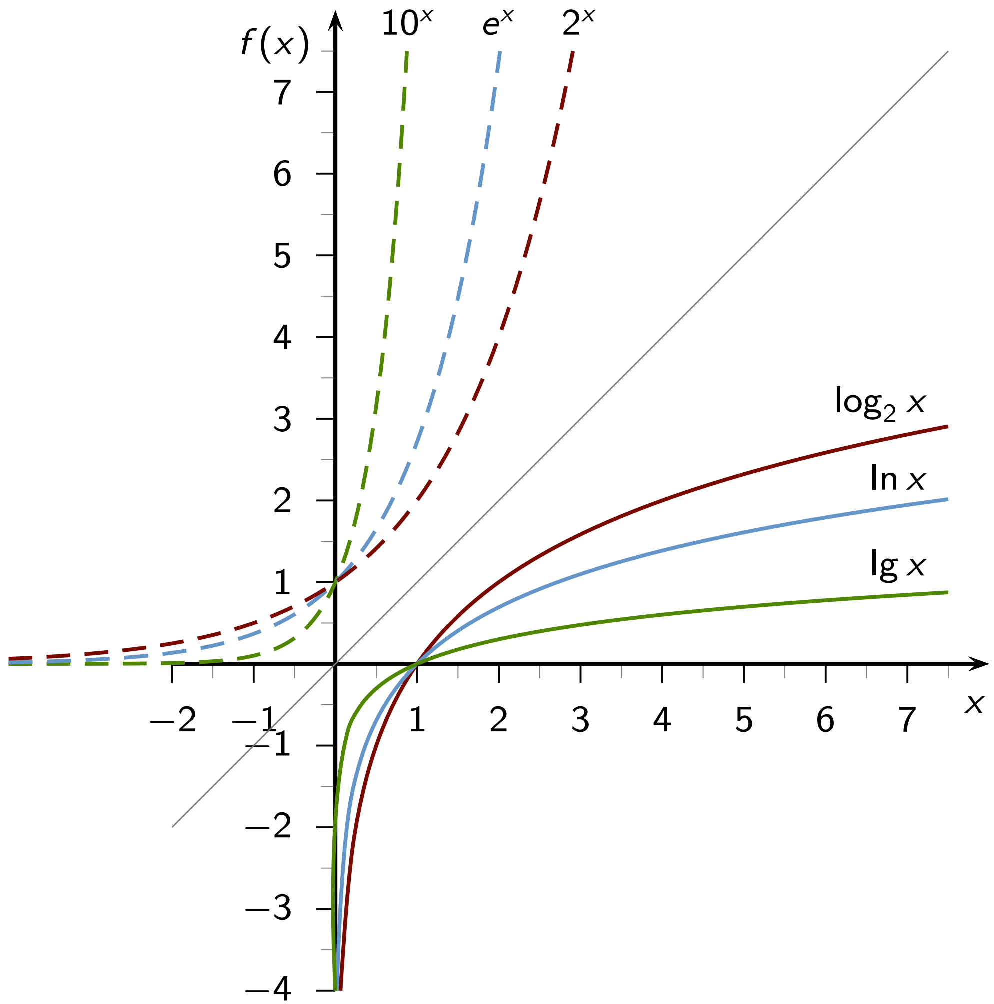
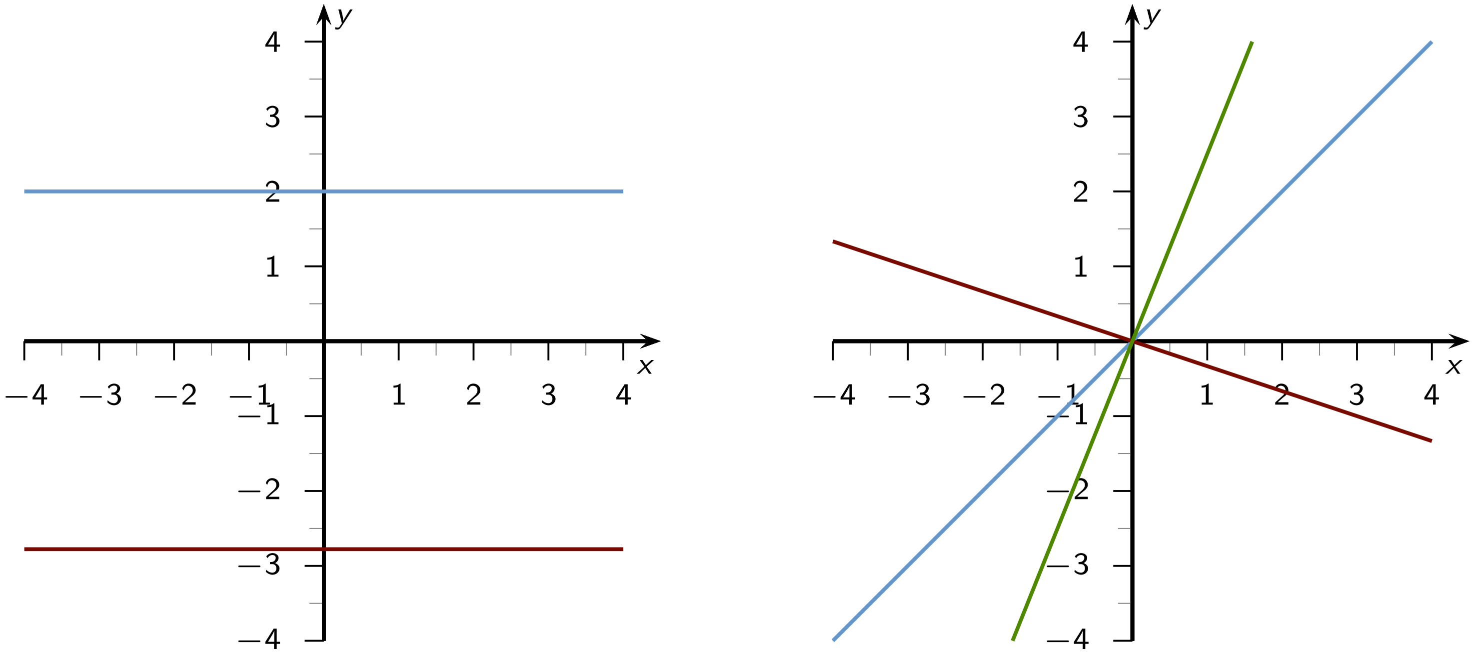


Abbildung: Exponentialfunktion und Logarithmusfunktion zur selben Basis sind Umkehrfunktionen voneinander, ihre Graphen sind daher Spiegelungen an der Winkelhalbierenden $y = x$ (graue Linie).

Übersicht Funktionsgraphen 1

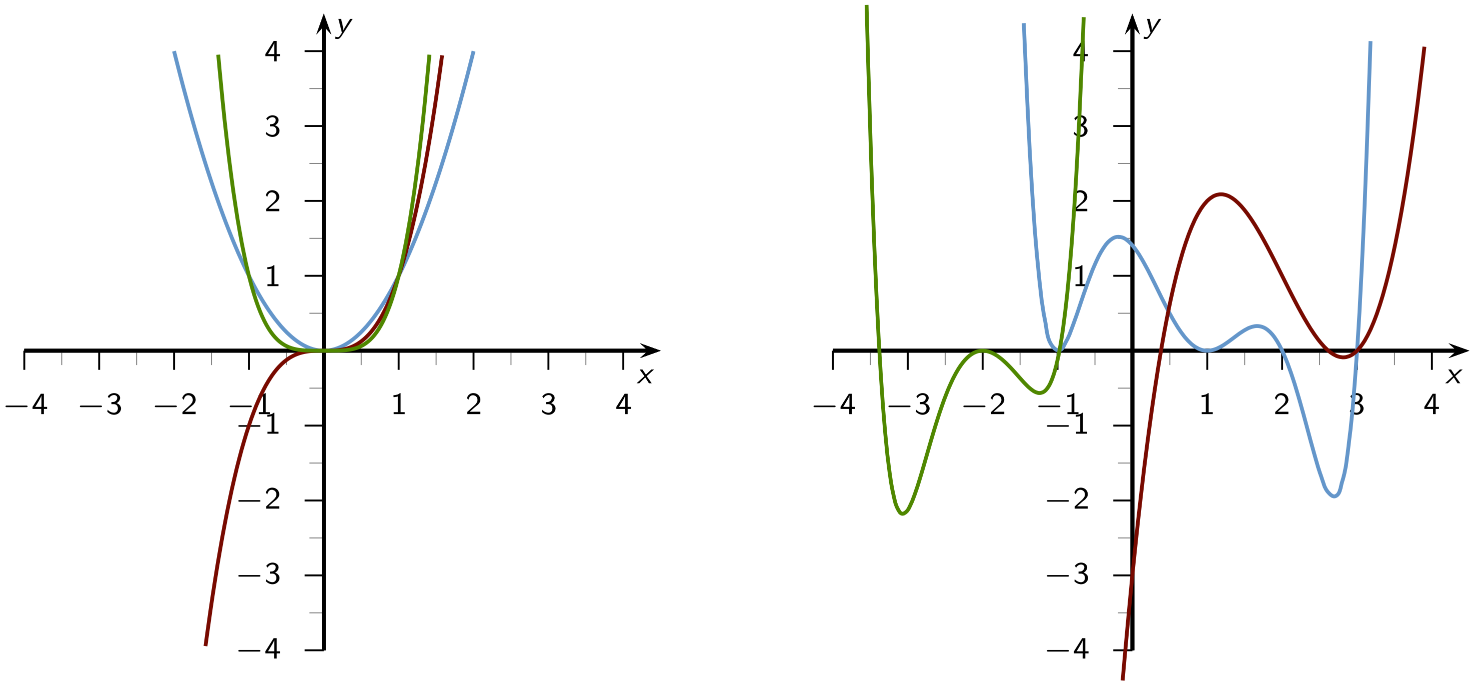


(a) konstante Funktionen

(b) lineare Funktionen

Abbildung: Graphen einiger häufig auftretender Funktionentypen

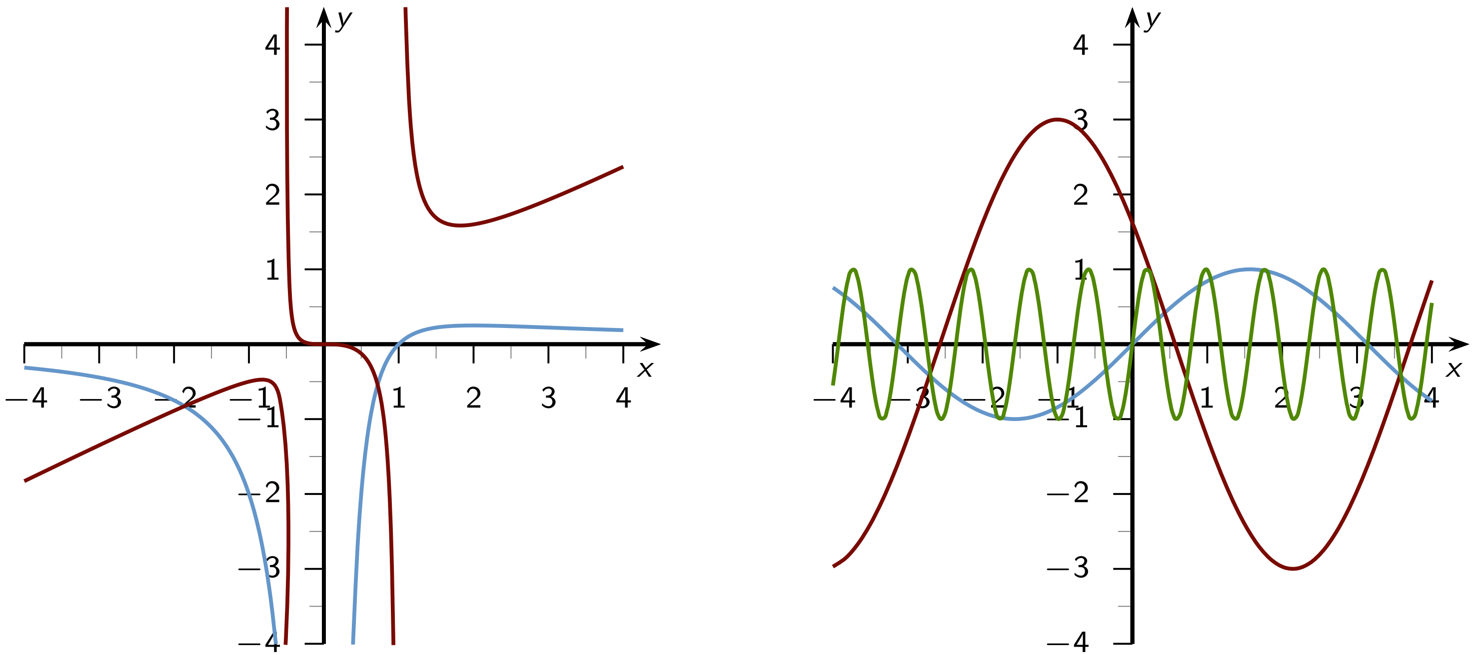
Übersicht Funktionsgraphen 2



(a) Monome (b) Polynome

Abbildung: Graphen einiger häufig auftretender Funktionentypen

Übersicht Funktionsgraphen 3

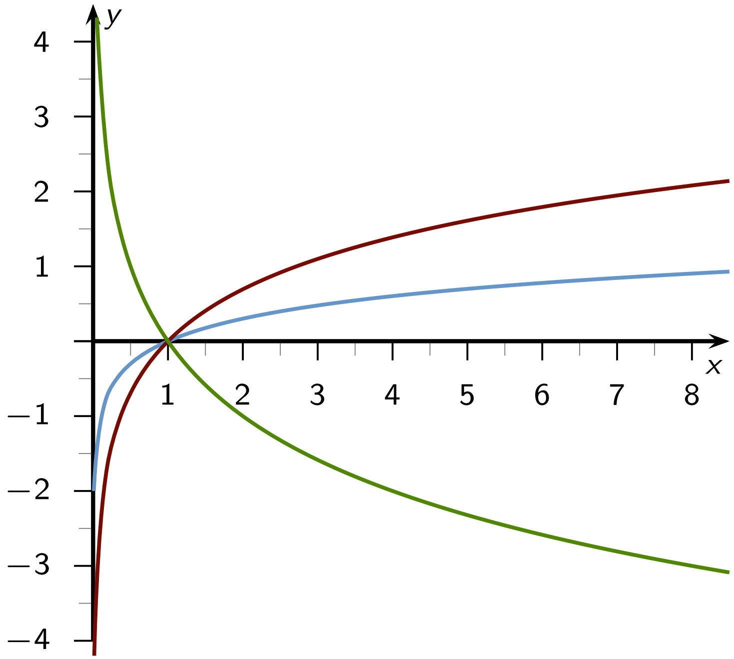


(a) gebrochen-rationale Funktionen

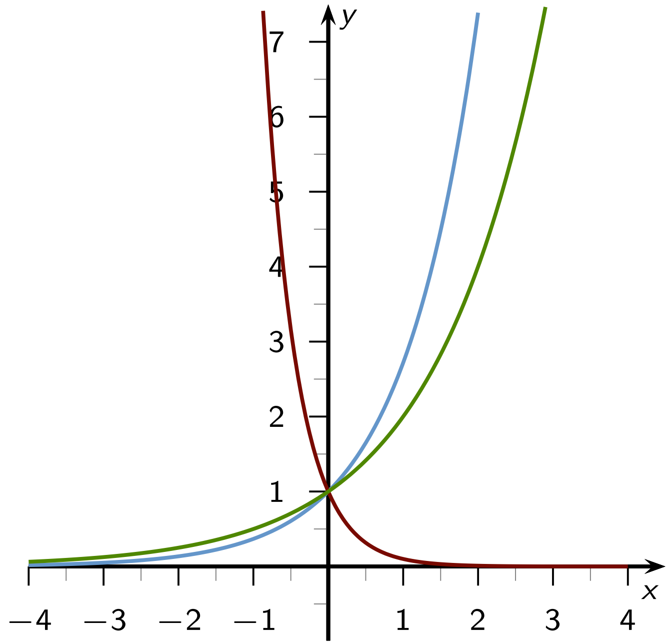
(b) Trigonometrische Funktionen

Abbildung: Graphen einiger häufig auftretender Funktionentypen

Übersicht Funktionsgraphen 4



(a) Logarithmen



(b) Exponentionalfunktionen

Abbildung: Graphen einiger häufig auftretender Funktionentypen