# Kapitelübersicht

3. Ungleichungen
   - Lineare Ungleichungen
   - Quadratische Ungleichungen
   - Ungleichungen mit Beträgen
   - Rechenregeln

## Beispiel 3.1

Gesucht sind alle $x \in \mathbb{R}$, für die $3x - 2 \geq 4 - x$ erfüllt ist.

Definitionsmenge der Ungleichung: $\mathbb{D} = \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} 3x - 2 &\geq 4 - x \\ \iff \quad 4x &\geq 6 \\ \iff \quad x &\geq \frac{3}{2} \end{aligned}$$

Somit ist $\mathbb{L} = \left[\frac{3}{2}, \infty\right)$.

## Beispiel 3.2

Gesucht sind alle $x \in \mathbb{R}$, für die $-\frac{1}{2}x + 5 > -3$ erfüllt ist.

Definitionsmenge der Ungleichung: $\mathbb{D} = \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} & -\frac{1}{2}x + 5 > -3 \\ \iff \quad & -\frac{1}{2}x > -8 \\ \iff \quad & x < 16 \end{aligned}$$

Somit ist $\mathbb{L} = \big(-\infty, 16\big)$.

# Quadratische Ungleichungen – Lösung durch Vorzeichendiagramme

## Vorzeichendiagramme

Für Ungleichungen, deren linke Seite in Faktoren zerlegt ist und deren rechte Seite 0 ist, lassen sich die Lösungsmengen gut mit Hilfe von Vorzeichendiagrammen bestimmen.

1. Bestimme für jeden Faktor die Intervalle mit positivem bzw. negativem Vorzeichen.
2. Die Vorzeichen werden für die einzelnen Faktoren in ein Diagramm eingetragen.
3. Berechne die Vorzeichenverteilung des Gesamtproduktes.

## Beispiel 3.3

Gesucht sind alle $x \in \mathbb{R}$, für die $(x-2)(x+5) < 0$ gilt.

Definitionsmenge der Ungleichung: $\mathbb{D} = \mathbb{R}$.

| | $x < -5$ | $x = -5$ | $-5 < x < 2$ | $x = 2$ | $x > 2$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $x - 2$ | $-$ | $-$ | $-$ | $0$ | $+$ |
| $x + 5$ | $-$ | $0$ | $+$ | $+$ | $+$ |
| $(x+5)(x-2)$ | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ |

Für die Lösungsmenge der Ungleichung ergibt sich somit $\mathbb{L} = \big(-5, 2\big)$.

# Beispiel 3.4

Gesucht sind alle $x \in \mathbb{R}$, für die $x^2 - 2\,x - 3 \leq 0$ gilt.

Definitionsmenge der Ungleichung: $\mathbb{D} = \mathbb{R}$.
Hier müssen wir zunächst $x^2 - 2\,x - 3$ faktorisieren.

$$\begin{aligned} x^2 - 2\,x - 3 = 0 &\iff x = 1 \pm \sqrt{1+3} \\ &\iff x = -1 \ \vee \ x = 3 \end{aligned}$$

Also ist $x^2 - 2x - 3 = (x+1)(x-3)$, d. h.

$$x^2 - 2x - 3 \leq 0 \iff (x+1)(x-3) \leq 0$$

## Beispiel 3.4 (fort.)

| | $x<-1$ | $x=-1$ | $-1<x<3$ | $x=3$ | $x>3$ |
|---:|:---:|:---:|:---:|:---:|:---:|
| $x+1$ | $-$ | $0$ | $+$ | $+$ | $+$ |
| $x-3$ | $-$ | $-$ | $-$ | $0$ | $+$ |
| $(x+1)(x-3)$ | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ |

Für die Lösungsmenge der Ungleichung ergibt sich somit $\mathbb{L}=\left[-1,3\right]$.

## Beispiel 3.5

Gesucht sind alle $p \in \mathbb{R}$, für die $\frac{2\,p-3}{p-1} \geq 3 - p$ gilt.

Definitionsmenge der Ungleichung: $\mathbb{D} = \mathbb{R}\backslash\{1\}$.
Wir formen die Ungleichung zunächst äquivalent um.

$$\begin{aligned}
\frac{2\,p-3}{p-1} \geq 3-p &\iff \frac{2\,p-3}{p-1} + p - 3 \geq 0 \\
&\iff \frac{2\,p-3+(p-3)(p-1)}{p-1} \geq 0 \\
&\iff \frac{p^2-2\,p}{p-1} \geq 0 \\
&\iff \frac{p(p-2)}{p-1} \geq 0
\end{aligned}$$

# Beispiel 3.5 (fort.)

| | $p<0$ | $p=0$ | $0<p<1$ | $p=1$ | $1<p<2$ | $p=2$ | $p>2$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $p$ | $-$ | $0$ | $+$ | $+$ | $+$ | $+$ | $+$ |
| $p-2$ | $-$ | $-$ | $-$ | $-$ | $-$ | $0$ | $+$ |
| $p-1$ | $-$ | $-$ | $-$ | $0$ | $+$ | $+$ | $+$ |
| $\frac{p(p-2)}{p-1}$ | $-$ | $0$ | $+$ | $!$ | $-$ | $0$ | $+$ |

Das Symbol ! im Diagramm soll andeuten, dass der Wert nicht zur Definitionsmenge gehört. Für die Lösungsmenge der Ungleichung ergibt sich somit $\mathbb{L} = \big[0,1\big) \cup \big[2,\infty\big)$.

# Ungleichungen mit Beträgen

Mehr noch als bei den Gleichungen mit Beträgen muss man beim Lösen von Ungleichungen mit Beträgen darauf achten, saubere Fallunterscheidungen zu verwenden.

## Beispiel 3.6

Gesucht ist die Lösungsmenge der Ungleichung

$$|x - 10| \leq \frac{1}{2}x\,.$$

Da

$$|x - 10| = \begin{cases} x - 10 & \text{falls } x \geq 10 \\ 10 - x & \text{falls } x < 10 \end{cases}$$

müssen zwei Fälle betrachtet werden.

## Beispiel 3.6 (fort.)

*1. Fall:* $x \geq 10$. Dann gilt

$$
\begin{aligned}
|x-10| \leq \frac{1}{2}x \iff\ & x - 10 \leq \frac{1}{2}x \\
\iff\ & \frac{1}{2}x \leq 10 \\
\iff\ & x \leq 20 \\
\implies\ & \mathbb{L}_1 = \left[10, 20\right]
\end{aligned}
$$

*2. Fall:* $x < 10$. Dann gilt

$$
\begin{aligned}
|x-10| \leq \frac{1}{2}x \iff\ & -x + 10 \leq \frac{1}{2}x \\
\iff\ & 10 \leq \frac{3}{2}x \\
\iff\ & \frac{20}{3} \leq x \\
\implies\ & \mathbb{L}_2 = \left[\frac{20}{3}, 10\right)
\end{aligned}
$$

Die Lösungsmenge von $|x - 10| \leq \frac{1}{2}x$ ergibt sich nun als Vereinigungsmenge von $\mathbb{L}_1$ und $\mathbb{L}_2$, d. h.

$$\mathbb{L} = \mathbb{L}_1 \cup \mathbb{L}_2 = \left[\frac{20}{3}, 20\right].$$

# Beispiel 3.7

Gesucht ist die Lösungsmenge der Ungleichung

$$|x+3| \leq |2x-1| + 3\,.$$

$$\text{Da} \qquad |x+3| = \begin{cases} x+3 & \text{falls } x \geq -3 \\ -x-3 & \text{falls } x < -3 \end{cases}$$

$$\text{und} \qquad |2x-1| = \begin{cases} 2x-1 & \text{falls } x \geq \frac{1}{2} \\ -2x+1 & \text{falls } x < \frac{1}{2} \end{cases}$$

müssen drei Fälle betrachtet werden.

# Beispiel 3.7 (fort.)

*1. Fall:* $x \geq \frac{1}{2}$.

$$\begin{aligned} |x+3| \leq |2x-1| + 3 &\iff x + 3 \leq 2x - 1 + 3 \\ &\iff 1 \leq x \\ &\implies \mathbb{L}_1 = \left[1, \infty\right) \end{aligned}$$

*2. Fall:* $-3 \leq x < \frac{1}{2}$.

$$\begin{aligned} |x+3| \leq |2x-1| + 3 &\iff x + 3 \leq -2x + 1 + 3 \\ &\iff 3x \leq 1 \\ &\iff x \leq \frac{1}{3} \\ &\implies \mathbb{L}_2 = \left[-3, \frac{1}{3}\right] \end{aligned}$$

## Beispiel 3.7 (fort.)

*3. Fall:* $x < -3$. Dann gilt

$$\begin{aligned} |x+3| \leq |2x-1| + 3 &\iff -x-3 \leq -2x+1+3 \\ &\iff x \leq 7 \\ &\implies \mathbb{L}_3 = (-\infty, -3) \end{aligned}$$

Die Lösungsmenge von $|x+3| \leq |2x-1| + 3$ ergibt sich wieder als Vereinigungsmenge der einzelnen Lösungsmengen, d. h.

$$\mathbb{L} = \mathbb{L}_1 \cup \mathbb{L}_2 \cup \mathbb{L}_3 = \left(-\infty, \frac{1}{3}\right] \cup [1, \infty)\,.$$



BERGISCHE UNIVERSITÄT WUPPERTAL

## Beispiel 3.8

Gesucht ist die Lösungsmenge der Ungleichung

$$\frac{|2x+1|}{x-3} \leq 1\,.$$

Definitionsmenge der Ungleichung: $\mathbb{D} = \mathbb{R}\backslash\{3\}$.

$$\text{Da} \qquad |2x+1| = \begin{cases} 2x+1 & \text{falls } x \geq -\frac{1}{2} \\ -2x-1 & \text{falls } x < -\frac{1}{2} \end{cases}$$

müssen zwei Fälle betrachtet werden.

## Beispiel 3.8 (fort.)

*1. Fall:* $x \geq -\frac{1}{2}$, $x \neq 3$.

$$\begin{aligned}
\frac{|2x+1|}{x-3} \leq 1 \iff & \frac{2x+1}{x-3} \leq 1 \\
\iff & \frac{(2x+1)-(x-3)}{x-3} \leq 0 \\
\iff & \frac{x+4}{x-3} \leq 0 \\
\implies & \mathbb{L}_1 = \left[-\frac{1}{2}, \infty\right) \cap \left[-4, 3\right) = \left[-\frac{1}{2}, 3\right)
\end{aligned}$$

## Beispiel 3.8 (fort.)

*2. Fall:* $x < -\frac{1}{2}$.

$$\begin{aligned}
\frac{|2x+1|}{x-3} \le 1 \iff & \frac{-2x-1}{x-3} \le 1 \\
\iff & \frac{(-2x-1)-(x-3)}{x-3} \le 0 \\
\iff & \frac{-3x+2}{x-3} \le 0 \\
\implies & \mathbb{L}_2 = \left(-\infty, -\frac{1}{2}\right) \cap \left(\left(-\infty, \frac{2}{3}\right) \cup \left(3, \infty\right)\right) = \left(-\infty, -\frac{1}{2}\right)
\end{aligned}$$

Die Lösungsmenge von $\frac{|2x+1|}{x-3} \le 1$ ergibt sich als Vereinigungsmenge der einzelnen Lösungsmengen, d. h.

$$\mathbb{L} = \mathbb{L}_1 \cup \mathbb{L}_2 = \left(-\frac{1}{2}, 3\right) \cup \left(-\infty, -\frac{1}{2}\right) = \left(-\infty, 3\right).$$

# Rechenregeln für Ungleichungen

Für $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ gilt:

$$
\begin{array}{lcl}
a > 0 \wedge b > 0 & \Longrightarrow & a + b > 0 \\
a > b & \Longleftrightarrow & a + c > b + c \\
a > b \wedge c > d & \Longrightarrow & a + c > b + d \\
a > 0 \wedge b > 0 & \Longrightarrow & ab > 0 \\
a > 0 \wedge b < 0 & \Longrightarrow & ab < 0 \\
a > b \wedge c > 0 & \Longleftrightarrow & ac > bc \\
a > b \wedge c < 0 & \Longleftrightarrow & ac < bc \\
a > b \wedge c > d & \Longrightarrow & ac > bd \\
ab > 0 & \Longleftrightarrow & (a > 0 \wedge b > 0) \vee (a < 0 \wedge b < 0) \\
ab < 0 & \Longleftrightarrow & (a > 0 \wedge b < 0) \vee (a < 0 \wedge b > 0) \\
a > b \wedge b > c & \Longrightarrow & a > c
\end{array}
$$

# Rechenregeln für Ungleichungen 2

Für $a, b, \in \mathbb{R}_+$, $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$a < b \iff a^n < b^n$$
$$a < b \iff a^{-n} > b^{-n}$$

Sinngemäß gelten entsprechende Regeln, wenn man die $<$ und $>$-Zeichen durch $\leq$ und $\geq$-Zeichen ersetzt.