Lineare Gleichungssysteme I

Beispiel 2.23

In der Schaltung
sind die Spannung U und die Widerstände R_1, R_2, R_3 gegeben. Bestimmen Sie die Ströme I_1, I_2 und I_3.

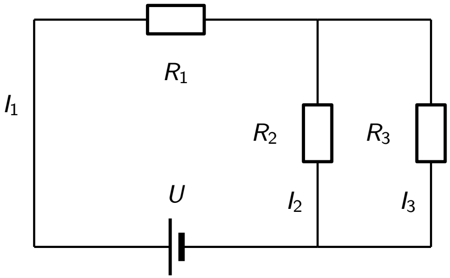

Abbildung: Schaltung

Beispiel 2.23 (fort.)

Aus den Kirchhoffschen Gesetzen folgen die Gleichungen:

$$\begin{aligned} I_2 + I_3 &= I_1 \\ I_1\, R_1 + I_3\, R_3 &= U \\ I_2\, R_2 &= I_3\, R_3 \end{aligned}$$

Lösen linearer Gleichungssysteme mit zwei Gleichungen und Unbekannten

Cramersche Regel

Sei also

$$\begin{aligned} (1) \quad & a_{11}\, x_1 + a_{12}\, x_2 = b_1 \\ (2) \quad & a_{21}\, x_1 + a_{22}\, x_2 = b_2, \end{aligned}$$

ein lineares Gleichungssystem (kurz „LGS“), wobei nicht alle Koeffizienten Null sein sollen.

Lösen linearer Gleichungssysteme mit zwei Gleichungen und Unbekannten

Cramersche Regel

Sei also

$$
\begin{aligned}
(1) \quad a_{11}\,x_1 + a_{12}\,x_2 &= b_1 \\
(2) \quad a_{21}\,x_1 + a_{22}\,x_2 &= b_2,
\end{aligned}
$$

ein lineares Gleichungssystem (kurz „LGS“), wobei nicht alle Koeffizienten Null sein sollen.
Geometrisch sind dies die Gleichungen zweier Geraden im $\mathbb{R}^2$. Wir suchen nun Wertepaare (x_1, x_2), die beide Gleichungen erfüllen, d. h. geometrisch gemeinsame Punkte der beiden Geraden.

Beispiel: Zwei Gleichungen und zwei Unbekannten

Beispiel 2.24

$$\begin{aligned} \text{(i)} \quad & 2\,x_1 + 2\,x_2 = 4 \\ \text{(ii)} \quad & 1\,x_1 - 1\,x_2 = 0 \end{aligned}$$

Also: $a_{11} = 2$, $a_{12} = 2$, $a_{21} = 1$, $a_{22} = -1$, $b_1 = 4$, $b_2 = 0$. Wir wenden *elementare Zeilenumformungen* an, um eine Gleichung zu erhalten, die nur noch x_2 oder nur noch x_1 enthält.

Beispiel 2.24 (fort.)

$$\begin{array}{l|rcrcr} (i) & 2\,x_1 & + & 2\,x_2 & = & 4 \\ (ii) & 1\,x_1 & + & (-1)\,x_2 & = & 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{l|rcrcr} (i) & 2\,x_1 & + & 2\,x_2 & = & 4 \\ (ii) & 1\,x_1 & + & (-1)\,x_2 & = & 0 \end{array}$$

Beispiel 2.24 (fort.)

$$\begin{array}{l|rcrcr} (i)\cdot(-1) & 2\,x_1 & + & 2\,x_2 & = & 4 \\ (ii)\cdot(-2) & 1\,x_1 & + & (-1)\,x_2 & = & 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{l|rcrcr} (i) & 2\,x_1 & + & 2\,x_2 & = & 4 \\ (ii) & 1\,x_1 & + & (-1)\,x_2 & = & 0 \end{array}$$

Beispiel 2.24 (fort.)

$$\begin{array}{l|rcrcr} (i)\cdot(-1) & (-1)\cdot 2\,x_1 & + & (-1)\cdot 2\,x_2 & = & (-1)\cdot 4 \\ (ii)\cdot(-2) & 1\,x_1 & + & (-1)\,x_2 & = & 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{l|rcrcr} (i) & 2\,x_1 & + & 2\,x_2 & = & 4 \\ (ii) & 1\,x_1 & + & (-1)\,x_2 & = & 0 \end{array}$$

Beispiel 2.24 (fort.)

$$\begin{array}{l|rcrcr} (i)\cdot(-1) & (-1)\cdot 2\,x_1 & + & (-1)\cdot 2\,x_2 & = & (-1)\cdot 4 \\ (ii)\cdot(-2) & (-2)\cdot 1\,x_1 & + & (-2)\cdot(-1)\,x_2 & = & (-2)\cdot 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{l|rcrcr} (i) & 2\,x_1 & + & 2\,x_2 & = & 4 \\ (ii) & 1\,x_1 & + & (-1)\,x_2 & = & 0 \end{array}$$

Beispiel 2.24 (fort.)

$$\begin{array}{l|rcrcl}
(i)\cdot(-1) & (-1)\cdot 2\,x_1 & + & (-1)\cdot 2\,x_2 & = & (-1)\cdot 4 \\
(ii)\cdot(-2) & (-2)\cdot 1\,x_1 & + & (-2)\cdot(-1)\,x_2 & = & (-2)\cdot 0 \\
\hline
(I) & & & ((-1)\cdot 2-1\cdot 2)x_1 & = & (-1)\cdot 4-2\cdot 0
\end{array}$$

Damit erhalten wir $-4x_1 = -4$, also $x_1 = 1$. Einsetzen in (ii) liefert $x_2 = x_1 = 1$ und damit $\mathbb{L} = \{(1,1)\}$.

$$\begin{array}{l|rcrcr}
(i) & 2\,x_1 & + & 2\,x_2 & = & 4 \\
(ii) & 1\,x_1 & + & (-1)\,x_2 & = & 0
\end{array}$$

Beispiel 2.24 (fort.)

$$
\begin{array}{l|rcrcl}
(i)\cdot(-1) & (-1)\cdot 2\,x_1 & + & (-1)\cdot 2\,x_2 & = & (-1)\cdot 4 \\
(ii)\cdot(-2) & (-2)\cdot 1\,x_1 & + & (-2)\cdot(-1)\,x_2 & = & (-2)\cdot 0 \\
\hline
(I) & & & ((-1)\cdot 2 - 1\cdot 2)x_1 & = & (-1)\cdot 4 - 2\cdot 0
\end{array}
$$

Damit erhalten wir $-4x_1 = -4$, also $x_1 = 1$. Einsetzen in (ii) liefert $x_2 = x_1 = 1$ und damit $\mathbb{L} = \{(1,1)\}$.
Analog kann man rechnen:

$$
\begin{array}{l|rcrcr}
(i)\cdot(-1) & 2\,x_1 & + & 2\,x_2 & = & 4 \\
(ii)\cdot 2 & 1\,x_1 & + & (-1)\,x_2 & = & 0
\end{array}
$$

Beispiel 2.24 (fort.)

$$
\begin{array}{l|rcl}
(i)\cdot(-1) & (-1)\cdot 2\,x_1 + \quad (-1)\cdot 2\,x_2 & = & (-1)\cdot 4 \\
(ii)\cdot(-2) & (-2)\cdot 1\,x_1 + (-2)\cdot(-1)\,x_2 & = & (-2)\cdot 0 \\
\hline
(I) & ((-1)\cdot 2 - 1\cdot 2)x_1 & = & (-1)\cdot 4 - 2\cdot 0
\end{array}
$$

Damit erhalten wir $-4x_1 = -4$, also $x_1 = 1$. Einsetzen in (ii) liefert $x_2 = x_1 = 1$ und damit $\mathbb{L} = \{(1,1)\}$.
Analog kann man rechnen:

$$
\begin{array}{l|rcl}
(i)\cdot(-1) & {\color{darkred}(-1)}\cdot 2\,x_1 {\color{darkred}+} {\color{darkred}(-1)}\cdot 2\,x_2 & = & {\color{darkred}(-1)}\cdot 4 \\
(ii)\cdot 2 & 1\,x_1 + \quad (-1)\,x_2 & = & 0
\end{array}
$$

Beispiel 2.24 (fort.)

$$\begin{array}{l|rcl}
(i)\cdot(-1) & (-1)\cdot 2\,x_1 + \quad (-1)\cdot 2\,x_2 &=& (-1)\cdot 4 \\
(ii)\cdot(-2) & (-2)\cdot 1\,x_1 + (-2)\cdot(-1)\,x_2 &=& (-2)\cdot 0 \\
\hline
(I) & ((-1)\cdot 2 - 1\cdot 2)x_1 &=& (-1)\cdot 4 - 2\cdot 0
\end{array}$$

Damit erhalten wir $-4x_1 = -4$, also $x_1 = 1$. Einsetzen in (ii) liefert $x_2 = x_1 = 1$ und damit $\mathbb{L} = \{(1,1)\}$.
Analog kann man rechnen:

$$\begin{array}{l|rcl}
(i)\cdot(-1) & (-1)\cdot 2\,x_1 + (-1)\cdot 2\,x_2 &=& (-1)\cdot 4 \\
(ii)\cdot 2 & 2\cdot 1\,x_1 + 2\cdot(-1)\,x_2 &=& 2\cdot 0
\end{array}$$

Beispiel 2.24 (fort.)

$$
\begin{array}{l|rcl}
(i)\cdot(-1) & (-1)\cdot 2\,x_1 + \quad (-1)\cdot 2\,x_2 & = & (-1)\cdot 4 \\
(ii)\cdot(-2) & (-2)\cdot 1\,x_1 + (-2)\cdot(-1)\,x_2 & = & (-2)\cdot 0 \\
\hline
(I) & ((-1)\cdot 2 - 1\cdot 2)x_1 & = & (-1)\cdot 4 - 2\cdot 0
\end{array}
$$

Damit erhalten wir $-4x_1 = -4$, also $x_1 = 1$. Einsetzen in (ii) liefert $x_2 = x_1 = 1$ und damit $\mathbb{L} = \{(1,1)\}$.
Analog kann man rechnen:

$$
\begin{array}{l|rcl}
(i)\cdot(-1) & (-1)\cdot 2\,x_1 + (-1)\cdot 2\,x_2 & = & (-1)\cdot 4 \\
(ii)\cdot 2 & 2\cdot 1\,x_1 + 2\cdot(-1)\,x_2 & = & 2\cdot 0 \\
\hline
(II) & (2\cdot(-1) - 2\cdot 1)\,x_2 & = & 2\cdot 0 - 1\cdot 4
\end{array}
$$

Damit erhalten wir $-4x_2 = -4$, also $x_2 = 1$. Einsetzen in (ii) liefert $x_1 = x_2 = 1$ und damit $\mathbb{L} = \{(1,1)\}$.

Allgemein gibt es drei verschiedene Möglichkeiten:

1. Es gibt eine eindeutig bestimmte Lösung.
   (Geometrisch: Die Geraden schneiden sich in einem Punkt.)

Allgemein gibt es drei verschiedene Möglichkeiten:

1. Es gibt eine eindeutig bestimmte Lösung.
   (Geometrisch: Die Geraden schneiden sich in einem Punkt.)
2. Es gibt unendlich viele Lösungen.
   (Geometrisch: Die Geraden sind gleich.)

Allgemein gibt es drei verschiedene Möglichkeiten:

1. Es gibt eine eindeutig bestimmte Lösung.
   (Geometrisch: Die Geraden schneiden sich in einem Punkt.)
2. Es gibt unendlich viele Lösungen.
   (Geometrisch: Die Geraden sind gleich.)
3. Es gibt keine Lösung.
   (Geometrisch: Die Geraden sind parallel aber nicht gleich.)

Wir setzen zunächst voraus, dass alle Koeffizienten ungleich Null sind.

$$\begin{array}{ll|l} (1) & & a_{11}\,x_1 + a_{12}\,x_2 = b_1 \\ (2) & & a_{21}\,x_1 + a_{22}\,x_2 = b_2 \end{array}$$

$$\begin{array}{ll|l} (1) & & a_{11}\,x_1 + a_{12}\,x_2 = b_1 \\ (2) & & a_{21}\,x_1 + a_{22}\,x_2 = b_2 \end{array}$$

Wir setzen zunächst voraus, dass alle Koeffizienten ungleich Null sind.

$$\begin{array}{l|rrrr} (1)\cdot a_{22} & a_{11}\,x_1 & +\ a_{12}\,x_2 & = & b_1 \\ (2)\cdot(-a_{12}) & a_{21}\,x_1 & +\ a_{22}\,x_2 & = & b_2 \end{array}$$

$$\begin{array}{l|rrrr} (1) & a_{11}\,x_1 & +\ a_{12}\,x_2 & = & b_1 \\ (2) & a_{21}\,x_1 & +\ a_{22}\,x_2 & = & b_2 \end{array}$$

Wir setzen zunächst voraus, dass alle Koeffizienten ungleich Null sind.

$$\begin{array}{l|rcrcr} (1)\cdot a_{22} & a_{22}\,a_{11}\,x_1 & + & a_{22}\,a_{12}\,x_2 & = & a_{22}\,b_1 \\ (2)\cdot(-a_{12}) & a_{21}\,x_1 & + & a_{22}\,x_2 & = & b_2 \end{array}$$

$$\begin{array}{l|rcrcr} (1) & a_{11}\,x_1 & + & a_{12}\,x_2 & = & b_1 \\ (2) & a_{21}\,x_1 & + & a_{22}\,x_2 & = & b_2 \end{array}$$

Wir setzen zunächst voraus, dass alle Koeffizienten ungleich Null sind.

$$\begin{array}{l|rcrcr} (1)\cdot a_{22} & a_{22}\,a_{11}\,x_1 & + & a_{22}\,a_{12}\,x_2 & = & a_{22}\,b_1 \\ (2)\cdot(-a_{12}) & -a_{12}\,a_{21}\,x_1 & - & a_{12}\,a_{22}\,x_2 & = & -a_{12}\,b_2 \end{array}$$

$$\begin{array}{l|rcrcr} (1) & a_{11}\,x_1 & + & a_{12}\,x_2 & = & b_1 \\ (2) & a_{21}\,x_1 & + & a_{22}\,x_2 & = & b_2 \end{array}$$

Wir setzen zunächst voraus, dass alle Koeffizienten ungleich Null sind.

$$\begin{array}{l|rcrcr}
(1)\cdot a_{22} & a_{22}\,a_{11}\,x_1 & + & a_{22}\,a_{12}\,x_2 & = & a_{22}\,b_1 \\
(2)\cdot(-a_{12}) & -a_{12}\,a_{21}\,x_1 & - & a_{12}\,a_{22}\,x_2 & = & -a_{12}\,b_2 \\
\hline
(I) & \multicolumn{5}{r}{(a_{11}\,a_{22} - a_{12}\,a_{21})\,x_1 = a_{22}\,b_1 - a_{12}\,b_2}
\end{array}$$

$$\begin{array}{l|rcrcr}
(1) & a_{11}\,x_1 & + & a_{12}\,x_2 & = & b_1 \\
(2) & a_{21}\,x_1 & + & a_{22}\,x_2 & = & b_2
\end{array}$$

Wir setzen zunächst voraus, dass alle Koeffizienten ungleich Null sind.

$$
\begin{array}{l|rcrcr}
(1)\cdot a_{22} & a_{22}\,a_{11}\,x_1 & + & a_{22}\,a_{12}\,x_2 & = & a_{22}\,b_1 \\
(2)\cdot(-a_{12}) & -a_{12}\,a_{21}\,x_1 & - & a_{12}\,a_{22}\,x_2 & = & -a_{12}\,b_2 \\
\hline
(I) & & & (a_{11}\,a_{22} - a_{12}\,a_{21})\,x_1 & = & a_{22}\,b_1 - a_{12}\,b_2
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{l|rcrcr}
(1)\cdot(-a_{21}) & a_{11}\,x_1 & + & a_{12}\,x_2 & = & b_1 \\
(2)\cdot a_{11} & a_{21}\,x_1 & + & a_{22}\,x_2 & = & b_2 \\
 & & & & &
\end{array}
$$

Wir setzen zunächst voraus, dass alle Koeffizienten ungleich Null sind.

$$\begin{array}{l|rcrcr}
(1)\cdot a_{22} & a_{22}\,a_{11}\,x_1 & + & a_{22}\,a_{12}\,x_2 & = & a_{22}\,b_1 \\
(2)\cdot(-a_{12}) & -a_{12}\,a_{21}\,x_1 & - & a_{12}\,a_{22}\,x_2 & = & -a_{12}\,b_2 \\
\hline
(I) & \multicolumn{5}{r}{(a_{11}\,a_{22} - a_{12}\,a_{21})\,x_1 = a_{22}\,b_1 - a_{12}\,b_2}
\end{array}$$

$$\begin{array}{l|rcrcr}
(1)\cdot(-a_{21}) & {\color{red}-a_{21}}\,a_{11}\,x_1 & {\color{red}-} & {\color{red}a_{21}}\,a_{12}\,x_2 & = & {\color{red}-a_{21}}\,b_1 \\
(2)\cdot a_{11} & a_{21}\,x_1 & + & a_{22}\,x_2 & = & b_2
\end{array}$$

Wir setzen zunächst voraus, dass alle Koeffizienten ungleich Null sind.

$$\begin{array}{l|rcl}
(1)\cdot a_{22} & a_{22}\,a_{11}\,x_1 + a_{22}\,a_{12}\,x_2 & = & a_{22}\,b_1 \\
(2)\cdot(-a_{12}) & -a_{12}\,a_{21}\,x_1 - a_{12}\,a_{22}\,x_2 & = & -a_{12}\,b_2 \\
\hline
(I) & (a_{11}\,a_{22} - a_{12}\,a_{21})\,x_1 & = & a_{22}\,b_1 - a_{12}\,b_2
\end{array}$$

$$\begin{array}{l|rcl}
(1)\cdot(-a_{21}) & -a_{21}a_{11}\,x_1 - a_{21}\,a_{12}\,x_2 & = & -a_{21}\,b_1 \\
(2)\cdot a_{11} & {\color{darkred}a_{11}}\,a_{21}\,x_1 + {\color{darkred}a_{11}}\,a_{22}\,x_2 & = & {\color{darkred}a_{11}}\,b_2
\end{array}$$

Wir setzen zunächst voraus, dass alle Koeffizienten ungleich Null sind.

$$\begin{array}{l|rcl}
(1)\cdot a_{22} & a_{22}\,a_{11}\,x_1 + a_{22}\,a_{12}\,x_2 &=& a_{22}\,b_1 \\
(2)\cdot(-a_{12}) & -a_{12}\,a_{21}\,x_1 - a_{12}\,a_{22}\,x_2 &=& -a_{12}\,b_2 \\
\hline
(I) & (a_{11}\,a_{22} - a_{12}\,a_{21})\,x_1 &=& a_{22}\,b_1 - a_{12}\,b_2
\end{array}$$

$$\begin{array}{l|rcl}
(1)\cdot(-a_{21}) & -a_{21}a_{11}\,x_1 - a_{21}\,a_{12}\,x_2 &=& -a_{21}\,b_1 \\
(2)\cdot a_{11} & a_{11}\,a_{21}\,x_1 + a_{11}\,a_{22}\,x_2 &=& a_{11}\,b_2 \\
\hline
(II) & (a_{11}\,a_{22} - a_{12}\,a_{21})\,x_2 &=& a_{11}\,b_2 - a_{21}\,b_1
\end{array}$$

1. (I) und (II) sind Bestimmungsgleichungen für x_1 und x_2. Man kann nachrechnen, dass (I) und (II) auch gültig sind, wenn Koeffizienten Null sind.

1. (I) und (II) sind Bestimmungsgleichungen für x_1 und x_2. Man kann nachrechnen, dass (I) und (II) auch gültig sind, wenn Koeffizienten Null sind.
2. Der Wert $D = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$ bestimmt die Lösungsmöglichkeit des Gleichungssystems. Man bezeichnet ihn daher als Determinante.

1. (I) und (II) sind Bestimmungsgleichungen für x_1 und x_2. Man kann nachrechnen, dass (I) und (II) auch gültig sind, wenn Koeffizienten Null sind.
2. Der Wert $D = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$ bestimmt die Lösungsmöglichkeit des Gleichungssystems. Man bezeichnet ihn daher als Determinante.
   2.1 Ist $D \neq 0$, so hat das lineare Gleichungssystem die eindeutige Lösung

$$x_1 = \frac{a_{22}\,b_1 - a_{12}\,b_2}{a_{11}\,a_{22} - a_{12}\,a_{21}}\,, \quad x_2 = \frac{a_{11}\,b_2 - a_{21}\,b_1}{a_{11}\,a_{22} - a_{12}\,a_{21}}$$

1. (I) und (II) sind Bestimmungsgleichungen für x_1 und x_2. Man kann nachrechnen, dass (I) und (II) auch gültig sind, wenn Koeffizienten Null sind.
2. Der Wert $D = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$ bestimmt die Lösungsmöglichkeit des Gleichungssystems. Man bezeichnet ihn daher als Determinante.
   2.1 Ist $D \neq 0$, so hat das lineare Gleichungssystem die eindeutige Lösung

$$x_1 = \frac{a_{22}\, b_1 - a_{12}\, b_2}{a_{11}\, a_{22} - a_{12}\, a_{21}}, \quad x_2 = \frac{a_{11}\, b_2 - a_{21}\, b_1}{a_{11}\, a_{22} - a_{12}\, a_{21}}$$

   2.2 Ist $D = 0$ und $a_{22}\, b_1 - a_{12}\, b_2 = 0$ und $a_{11}\, b_2 - a_{21}\, b_1 = 0$, so hat das lineare Gleichungssystem unendlich viele Lösungen.

1. (I) und (II) sind Bestimmungsgleichungen für x_1 und x_2. Man kann nachrechnen, dass (I) und (II) auch gültig sind, wenn Koeffizienten Null sind.
2. Der Wert $D = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$ bestimmt die Lösungsmöglichkeit des Gleichungssystems. Man bezeichnet ihn daher als Determinante.
   - 2.1 Ist $D \neq 0$, so hat das lineare Gleichungssystem die eindeutige Lösung

$$x_1 = \frac{a_{22}\, b_1 - a_{12}\, b_2}{a_{11}\, a_{22} - a_{12}\, a_{21}}\,, \quad x_2 = \frac{a_{11}\, b_2 - a_{21}\, b_1}{a_{11}\, a_{22} - a_{12}\, a_{21}}$$

   - 2.2 Ist $D = 0$ und $a_{22}\, b_1 - a_{12}\, b_2 = 0$ und $a_{11}\, b_2 - a_{21}\, b_1 = 0$, so hat das lineare Gleichungssystem unendlich viele Lösungen.
   - 2.3 Ist $D = 0$ und $(a_{22}\, b_1 - a_{12}\, b_2 \neq 0$ oder $a_{11}\, b_2 - a_{21}\, b_1 \neq 0)$, so hat das lineare Gleichungssystem keine Lösung.

Bezeichnung 2.25

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}\,a_{22} - a_{12}\,a_{21}$$

heißt Determinante*.*
Ebenso:

$$D_{x_1} = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix} = b_1\,a_{22} - b_2\,a_{12}$$

und

$$D_{x_2} = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix} = a_{11}\,b_2 - a_{21}\,b_1$$

D_{x_1} und D_{x_2} erhält man aus D, indem man die 1. bzw. 2. Spalte durch die rechte Seite des Gleichungssystems (1) und (2) ersetzt. Man nennt sie daher auch Streichungsdeterminanten.

Damit gilt:

$$\begin{aligned} (I) \quad & D \cdot x_1 = D_{x_1} \\ (II) \quad & D \cdot x_2 = D_{x_2} \end{aligned}$$

und

1. $D \neq 0$. Dann ist $x_1 = \frac{D_{x_1}}{D}$, $x_2 = \frac{D_{x_2}}{D}$, also

$$\mathbb{L} = \left\{ \left(\frac{D_{x_1}}{D}, \frac{D_{x_2}}{D} \right) \right\}.$$

Damit gilt:

$$\begin{aligned} (I) \quad D \cdot x_1 &= D_{x_1} \\ (II) \quad D \cdot x_2 &= D_{x_2} \end{aligned}$$

und

1. $D \neq 0$. Dann ist $x_1 = \frac{D_{x_1}}{D}$, $x_2 = \frac{D_{x_2}}{D}$, also
$$\mathbb{L} = \left\{ \left(\frac{D_{x_1}}{D}, \frac{D_{x_2}}{D} \right) \right\}.$$
2. $D = 0$ und $D_{x_1} = 0$ und $D_{x_2} = 0$. Dann wird aus (I) und (II) $0 = 0$, also
$$\mathbb{L} = \left\{ (x_1, x_2) : a_{11}\, x_1 + a_{12}\, x_2 = b_1 \right\}.$$

Damit gilt:

$$\begin{aligned} (I) \quad & D \cdot x_1 = D_{x_1} \\ (II) \quad & D \cdot x_2 = D_{x_2} \end{aligned}$$

und

1. $D \neq 0$. Dann ist $x_1 = \frac{D_{x_1}}{D}$, $x_2 = \frac{D_{x_2}}{D}$, also
$$\mathbb{L} = \left\{ \left(\frac{D_{x_1}}{D}, \frac{D_{x_2}}{D} \right) \right\}.$$
2. $D = 0$ und $D_{x_1} = 0$ und $D_{x_2} = 0$. Dann wird aus (I) und (II) $0 = 0$, also
$$\mathbb{L} = \left\{ (x_1, x_2) : a_{11}\, x_1 + a_{12}\, x_2 = b_1 \right\}.$$
3. $D = 0$ und $(D_{x_1} \neq 0$ oder $D_{x_2} \neq 0)$. Dann ist (I) oder (II) nicht erfüllbar, also:
$$\mathbb{L} = \{\ \}.$$

Beispiel 2.26

$$
\begin{aligned}
2\,x_1 - 3\,x_2 &= 3 \\
\frac{1}{3}\,x_1 + x_2 &= 2
\end{aligned}
$$

Beispiel 2.26

$$2\,x_1 - 3\,x_2 = 3$$
$$\frac{1}{3}\,x_1 + x_2 = 2$$

Dazu berechnen wir die zugehörigen Determinanten.

$$D = \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ \frac{1}{3} & 1 \end{vmatrix} = 3 \qquad D_{x_1} = \begin{vmatrix} 3 & -3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 9 \qquad D_{x_2} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ \frac{1}{3} & 2 \end{vmatrix} = 3$$

Da $D \neq 0$ ist, ist das Gleichungssystem eindeutig lösbar und es gilt

$$x_1 = \frac{D_{x_1}}{D} = 3\,, \quad x_2 = \frac{D_{x_2}}{D} = 1\,.$$

Die Lösungsmenge ist somit $\mathbb{L} = \{(3,1)\}$.

Gaußsches Eliminationsverfahren

Besitzen zwei lineare Gleichungssysteme die selbe Lösungsmenge, so heißen die beiden linearen Gleichungssysteme *äquivalent*.

Gaußsches Eliminationsverfahren

Besitzen zwei lineare Gleichungssysteme die selbe Lösungsmenge, so heißen die beiden linearen Gleichungssysteme *äquivalent*.
Die folgenden drei Umformungen wandeln ein LGS in ein äquivalentes System um, d. h. die Lösungsmenge wird dadurch nicht verändert:

1. Vertauschen zweier Gleichungen (Zeilen)

Diese drei Umformungen bezeichnet man als *elementare Zeilenumformungen*.

Gaußsches Eliminationsverfahren

Besitzen zwei lineare Gleichungssysteme die selbe Lösungsmenge, so heißen die beiden linearen Gleichungssysteme *äquivalent*.
Die folgenden drei Umformungen wandeln ein LGS in ein äquivalentes System um, d. h. die Lösungsmenge wird dadurch nicht verändert:

1. Vertauschen zweier Gleichungen (Zeilen)
2. Multiplikation einer Gleichung (Zeile) mit einer reellen Zahl $\alpha \neq 0$

Diese drei Umformungen bezeichnet man als *elementare Zeilenumformungen*.

Gaußsches Eliminationsverfahren

Besitzen zwei lineare Gleichungssysteme die selbe Lösungsmenge, so heißen die beiden linearen Gleichungssysteme *äquivalent*.
Die folgenden drei Umformungen wandeln ein LGS in ein äquivalentes System um, d. h. die Lösungsmenge wird dadurch nicht verändert:

1. Vertauschen zweier Gleichungen (Zeilen)
2. Multiplikation einer Gleichung (Zeile) mit einer reellen Zahl $\alpha \neq 0$
3. Addition/Subtraktion des Vielfachen einer Gleichung (Zeile) zu/von einer anderen Gleichung (Zeile)

Diese drei Umformungen bezeichnet man als *elementare Zeilenumformungen*.

Wir betrachten nun lineare Gleichungssysteme in allgemeiner Form mit m Gleichungen und n Unbekannten:

$$\begin{array}{ccccccccccc}
a_{11}\,x_1 & + & a_{12}\,x_2 & + & \ldots & + & a_{1k}\,x_k & + & \ldots & + & a_{1n}\,x_n & = & b_1 \\
a_{21}\,x_1 & + & a_{22}\,x_2 & + & \ldots & + & a_{2k}\,x_k & + & \ldots & + & a_{2n}\,x_n & = & b_2 \\
\vdots & & \vdots & & & & \vdots & & & & \vdots & & \vdots \\
a_{i1}\,x_1 & + & a_{i2}\,x_2 & + & \ldots & + & a_{ik}\,x_k & + & \ldots & + & a_{in}\,x_n & = & b_i \\
\vdots & & \vdots & & & & \vdots & & & & \vdots & & \vdots \\
a_{m1}\,x_1 & + & a_{m2}\,x_2 & + & \ldots & + & a_{mk}\,x_k & + & \ldots & + & a_{mn}\,x_n & = & b_m
\end{array}$$

Häufig schreibt man statt der m Gleichungen untereinander ein Tableau mit den Koeffizienten:

$$\left(\begin{array}{cccccc|c}
a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1k} & \dots & a_{1n} & b_1 \\
a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2k} & \dots & a_{2n} & b_2 \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots & \vdots \\
a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ik} & \dots & a_{in} & b_i \\
\vdots & \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\
a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mk} & \dots & a_{mn} & b_m
\end{array}\right)$$

Mit Hilfe elementarer Zeilenumformungen lässt sich jedes Gleichungssystem auf sogenannte *Zeilenstufenform* bringen.

$$
\left(\begin{array}{cccccccccc|c}
1 & * & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & * & \tilde{b}_1 \\
0 & 1 & * & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & * & \tilde{b}_2 \\
0 & \ldots\ 0 & 1 & * & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & * & \tilde{b}_3 \\
0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 & * & \cdots & \cdots & \cdots & * & \tilde{b}_4 \\
0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 1 & * & \cdots & \cdots & * & \tilde{b}_5 \\
\vdots & & & & & & \ddots & \ddots & & \vdots & \vdots \\
0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 1 & * \ \ldots & * & \tilde{b}_r \\
0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \tilde{b}_{r+1} \\
\vdots & & & & & & & \vdots & & \vdots & \vdots \\
0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \tilde{b}_m
\end{array}\right)
$$

Die Lösung des linearen Gleichungssystems erhält man aus der Zeilenstufenform durch *Rückwärtseinsetzen*.

- Zeile $r+1$ bis m: Gleichungen der Form $0 = \tilde{b}_i$ sind nur lösbar, falls $\tilde{b}_i = 0$ ist. Damit ist das gesamte Gleichungssystem nur lösbar, wenn $\tilde{b}_{r+1} = \tilde{b}_{r+2} = \ldots = \tilde{b}_m = 0$ ist, andernfalls ist $\mathbb{L} = \{\,\}$.

Die Lösung des linearen Gleichungssystems erhält man aus der Zeilenstufenform durch *Rückwärtseinsetzen*.

- Zeile $r+1$ bis m: Gleichungen der Form $0 = \tilde{b}_i$ sind nur lösbar, falls $\tilde{b}_i = 0$ ist. Damit ist das gesamte Gleichungssystem nur lösbar, wenn $\tilde{b}_{r+1} = \tilde{b}_{r+2} = \ldots = \tilde{b}_m = 0$ ist, andernfalls ist $\mathbb{L} = \{\,\}$.
- Wenn $\tilde{b}_{r+1} = \tilde{b}_{r+2} = \ldots = \tilde{b}_m = 0$ ist, so entsprechen die Zeilen $r+1$ bis m keiner Information und können entfernt werden.

Die Lösung des linearen Gleichungssystems erhält man aus der Zeilenstufenform durch *Rückwärtseinsetzen*.

- Zeile $r+1$ bis m: Gleichungen der Form $0 = \tilde{b}_i$ sind nur lösbar, falls $\tilde{b}_i = 0$ ist. Damit ist das gesamte Gleichungssystem nur lösbar, wenn $\tilde{b}_{r+1} = \tilde{b}_{r+2} = \ldots = \tilde{b}_m = 0$ ist, andernfalls ist $\mathbb{L} = \{\,\}$.
- Wenn $\tilde{b}_{r+1} = \tilde{b}_{r+2} = \ldots = \tilde{b}_m = 0$ ist, so entsprechen die Zeilen $r+1$ bis m keiner Information und können entfernt werden.
- Steht in einer Spalte keine „Treppenstufe", so kann man die entsprechende Variable frei wählen. Man ersetzt sie in der Lösung durch einen freien Parameter, z. B. $t \in \mathbb{R}$.
  Ein Gleichungssystem, dessen Lösung freie Parameter enthält, nennt man *unterbestimmt*.

Beispiel 2.27

$$\begin{aligned} x_1 + 3x_2 - x_3 &= 4 \\ 3x_1 + 4x_2 \phantom{{}+x_3} &= 11 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 &= 7 \\ 2x_1 - 4x_2 + 4x_3 &= 6 \end{aligned}$$

Beispiel 2.27

$$\begin{aligned} x_1 + 3x_2 - x_3 &= 4 \\ 3x_1 + 4x_2 \phantom{{}+x_3} &= 11 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 &= 7 \\ 2x_1 - 4x_2 + 4x_3 &= 6 \end{aligned} \qquad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -1 & 4 \\ 3 & 4 & 0 & 11 \\ 2 & 1 & 1 & 7 \\ 2 & -4 & 4 & 6 \end{array}\right) \begin{array}{l} (-3) \; (-2) \; (-2) \\ + \\ + \\ + \end{array}$$

Beispiel 2.27

$$\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & + & 3x_2 & - & x_3 & = & 4 \\ 3x_1 & + & 4x_2 & & & = & 11 \\ 2x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & 7 \\ 2x_1 & - & 4x_2 & + & 4x_3 & = & 6 \end{array} \qquad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -1 & 4 \\ 3 & 4 & 0 & 11 \\ 2 & 1 & 1 & 7 \\ 2 & -4 & 4 & 6 \end{array}\right) \begin{array}{ccc} (-3) & (-2) & (-2) \\ + & & \\ & + & \\ & & + \end{array}$$

$$\longrightarrow \quad \begin{array}{rcrcrcr} x_1 & + & 3x_2 & - & x_3 & = & 4 \\ & - & 5x_2 & + & 3x_3 & = & -1 \\ & - & 5x_2 & + & 3x_3 & = & -1 \\ & - & 10x_2 & + & 6x_3 & = & -2 \end{array} \qquad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -1 & 4 \\ 0 & -5 & 3 & -1 \\ 0 & -5 & 3 & -1 \\ 0 & -10 & 6 & -2 \end{array}\right) \begin{array}{cc} & \\ (-1) & (-2) \\ + & \\ & + \end{array}$$

Beispiel 2.27 (fort.)

$$\longrightarrow \quad \begin{aligned} x_1 + 3x_2 - x_3 &= 4 \\ -5x_2 + 3x_3 &= -1 \\ 0 &= 0 \\ 0 &= 0 \end{aligned} \qquad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -1 & 4 \\ 0 & -5 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Beispiel 2.27 (fort.)

$$\longrightarrow \quad \begin{aligned} x_1 + 3x_2 - x_3 &= 4 \\ -5x_2 + 3x_3 &= -1 \\ 0 &= 0 \\ 0 &= 0 \end{aligned} \qquad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -1 & 4 \\ 0 & -5 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$\Longrightarrow x_3$ ist frei wählbar: $x_3 = t \in \mathbb{R}$

Beispiel 2.27 (fort.)

$$\longrightarrow \quad \begin{array}{rcrcrcr} x_1 & + & 3x_2 & - & x_3 & = & 4 \\ & - & 5x_2 & + & 3x_3 & = & -1 \\ & & & & 0 & = & 0 \\ & & & & 0 & = & 0 \end{array} \qquad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -1 & 4 \\ 0 & -5 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$\Longrightarrow x_3$ ist frei wählbar: $x_3 = t \in \mathbb{R}$

$$\overset{(II)}{\Longrightarrow} \; -5\,x_2 + 3t = -1 \iff x_2 = \frac{1}{5} + \frac{3}{5}t$$

Beispiel 2.27 (fort.)

$$\longrightarrow \quad \begin{aligned} x_1 + 3x_2 - x_3 &= 4 \\ -5x_2 + 3x_3 &= -1 \\ 0 &= 0 \\ 0 &= 0 \end{aligned} \qquad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -1 & 4 \\ 0 & -5 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$\Longrightarrow x_3$ ist frei wählbar: $x_3 = t \in \mathbb{R}$

$$\overset{(II)}{\Longrightarrow} \; -5\,x_2 + 3t = -1 \iff x_2 = \frac{1}{5} + \frac{3}{5}t$$

$$\overset{(I)}{\Longrightarrow} \; x_1 + 3\left(\frac{1}{5} + \frac{3}{5}t\right) - t = 4 \iff x_1 = \frac{17}{5} - \frac{4}{5}t$$

Beispiel 2.27 (fort.)

$$\longrightarrow \quad \begin{aligned} x_1 + 3x_2 - x_3 &= 4 \\ -5x_2 + 3x_3 &= -1 \\ 0 &= 0 \\ 0 &= 0 \end{aligned} \qquad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -1 & 4 \\ 0 & -5 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\Longrightarrow x_3 \text{ ist frei wählbar: } x_3 = t \in \mathbb{R}$$

$$\overset{(II)}{\Longrightarrow} -5\,x_2 + 3t = -1 \iff x_2 = \frac{1}{5} + \frac{3}{5}t$$

$$\overset{(I)}{\Longrightarrow} x_1 + 3\left(\frac{1}{5} + \frac{3}{5}t\right) - t = 4 \iff x_1 = \frac{17}{5} - \frac{4}{5}t$$

$$\Longrightarrow \mathbb{L} = \left\{\left(\frac{17}{5} - \frac{4}{5}t,\ \frac{1}{5} + \frac{3}{5}t,\ t\right),\ t \in \mathbb{R}\right\}$$

Beispiel 2.28

$$\begin{aligned} 3x + 2y + z &= 4 \\ 6x + 5y + 4z &= 11 \\ -3x \phantom{{}+5y} + 3z &= 4 \end{aligned}$$

Beispiel 2.28

$$\begin{aligned} 3x &+ 2y &+ z &= 4 \\ 6x &+ 5y &+ 4z &= 11 \\ -3x & &+ 3z &= 4 \end{aligned} \qquad \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & 1 & 4 \\ 6 & 5 & 4 & 11 \\ -3 & 0 & 3 & 4 \end{array}\right) \begin{array}{l} (-2) \\ + \\ + \end{array}$$

Beispiel 2.28

$$\begin{aligned} 3x + 2y + z &= 4 \\ 6x + 5y + 4z &= 11 \\ -3x \phantom{{}+ 2y} + 3z &= 4 \end{aligned} \qquad \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & 1 & 4 \\ 6 & 5 & 4 & 11 \\ -3 & 0 & 3 & 4 \end{array}\right) \begin{array}{l} (-2) \\ + \\ + \end{array}$$

$$\longrightarrow \quad \begin{aligned} 3x + 2y + z &= 4 \\ y + 2z &= 3 \\ 2y + 4z &= 8 \end{aligned} \qquad \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 4 & 8 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ (-2) \\ + \end{array}$$

Beispiel 2.28

$$\begin{aligned} 3x + 2y + z &= 4 \\ 6x + 5y + 4z &= 11 \\ -3x + 3z &= 4 \end{aligned} \qquad \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & 1 & 4 \\ 6 & 5 & 4 & 11 \\ -3 & 0 & 3 & 4 \end{array}\right) \begin{array}{l} (-2) \\ + \\ + \end{array}$$

$$\longrightarrow \quad \begin{aligned} 3x + 2y + z &= 4 \\ y + 2z &= 3 \\ 2y + 4z &= 8 \end{aligned} \qquad \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 4 & 8 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ (-2) \\ + \end{array}$$

$$\longrightarrow \quad \begin{aligned} 3x + 2y + z &= 4 \\ y + 2z &= 3 \\ 0 &= 2 \end{aligned} \qquad \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right)$$

Beispiel 2.28 (fort.)

$$\longrightarrow \quad \begin{aligned} 3x + 2y + z &= 4 \\ y + 2z &= 3 \\ 0 &= 2 \end{aligned} \qquad \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right)$$

Beispiel 2.28 (fort.)

$$\longrightarrow \quad \begin{aligned} 3x + 2y + z &= 4 \\ y + 2z &= 3 \\ 0 &= 2 \end{aligned} \qquad \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right)$$

Die dritte Zeile entspricht demnach der Gleichung $0\,x + 0\,y + 0\,z = 2$. Diese Gleichung hat keine Lösung und daher ist das gesamte LGS nicht lösbar,

$$\mathbb{L} = \{\,\}.$$

Beispiel 2.29

$$
\begin{aligned}
3x + 2y + z &= 4 \\
6x + 5y + 4z &= 11 \\
-3x \phantom{{}+5y} + 2z &= 4
\end{aligned}
$$

Beispiel 2.29

$$
\begin{aligned}
3x + 2y + z &= 4\\
6x + 5y + 4z &= 11\\
-3x \phantom{{}+5y} + 2z &= 4
\end{aligned}
\qquad
\begin{array}{c}
\left(\begin{array}{ccc|c}
3 & 2 & 1 & 4\\
6 & 5 & 4 & 11\\
-3 & 0 & 2 & 4
\end{array}\right)
\end{array}
\begin{array}{l}
(-2)\\
+\\
+
\end{array}
$$

Beispiel 2.29

$$
\begin{aligned}
3x + 2y + z &= 4\\
6x + 5y + 4z &= 11\\
-3x \phantom{{}+2y} + 2z &= 4
\end{aligned}
\qquad
\left(\begin{array}{ccc|c}
3 & 2 & 1 & 4\\
6 & 5 & 4 & 11\\
-3 & 0 & 2 & 4
\end{array}\right)
\begin{array}{l}
(-2)\\
+\\
+
\end{array}
$$

$$
\longrightarrow\quad
\begin{aligned}
3x + 2y + z &= 4\\
y + 2z &= 3\\
2y + 3z &= 8
\end{aligned}
\qquad
\left(\begin{array}{ccc|c}
3 & 2 & 1 & 4\\
0 & 1 & 2 & 3\\
0 & 2 & 3 & 8
\end{array}\right)
\begin{array}{l}
\\
(-2)\\
+
\end{array}
$$

Beispiel 2.29

$$\begin{aligned} 3x + 2y + z &= 4 \\ 6x + 5y + 4z &= 11 \\ -3x + 2z &= 4 \end{aligned} \qquad \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & 1 & 4 \\ 6 & 5 & 4 & 11 \\ -3 & 0 & 2 & 4 \end{array}\right) \begin{array}{l} (-2) \\ + \\ + \end{array}$$

$$\longrightarrow \quad \begin{aligned} 3x + 2y + z &= 4 \\ y + 2z &= 3 \\ 2y + 3z &= 8 \end{aligned} \qquad \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 3 & 8 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ (-2) \\ + \end{array}$$

$$\longrightarrow \quad \begin{aligned} 3x + 2y + z &= 4 \\ y + 2z &= 3 \\ - z &= 2 \end{aligned} \qquad \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{array}\right)$$

Beispiel 2.29 (fort.)

$$\longrightarrow \quad \begin{aligned} 3x + 2y + z &= 4 \\ y + 2z &= 3 \\ - z &= 2 \end{aligned} \qquad \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{array}\right)$$

Beispiel 2.29 (fort.)

$$\longrightarrow \quad \begin{array}{rcrcrcl} 3x & + & 2y & + & z & = & 4 \\ & & y & + & 2z & = & 3 \\ & & & - & z & = & 2 \end{array} \qquad \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{array}\right)$$

$$\overset{(III)}{\Longrightarrow} -z = 2 \iff z = -2$$

$$\overset{(II)}{\Longrightarrow} y + 2 \cdot (-2) = 3 \iff y = 7$$

$$\overset{(I)}{\Longrightarrow} 3x + 2 \cdot 7 + (-2) = 4 \iff x = -\frac{8}{3}$$

$$\Longrightarrow \mathbb{L} = \left\{ \left(-\frac{8}{3},\ 7,\ -2 \right) \right\}$$

LGS mit drei Gleichungen und drei Unbekannten

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + 2x_3 &= 3 \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 &= 4 \\ 2x_1 \qquad\qquad\quad &= 2 \end{aligned}$$

LGS mit drei Gleichungen und drei Unbekannten

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + 2x_3 &= 3 \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 &= 4 \\ 2x_1 &= 2 \end{aligned}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right) \begin{array}{l} (-2) \quad (-2) \\ + \\ \quad\quad + \end{array}$$

LGS mit drei Gleichungen und drei Unbekannten

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + 2x_3 &= 3 \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 &= 4 \\ 2x_1 \phantom{{}+x_2+2x_3} &= 2 \end{aligned} \qquad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right) \begin{array}{l} (-2) \quad (-2) \\ + \\ + \end{array}$$

$$\longrightarrow \quad \begin{aligned} x_1 + x_2 + 2x_3 &= 3 \\ -x_2 - 2x_3 &= -2 \\ -2x_2 - 4x_3 &= -4 \end{aligned} \qquad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -2 & -2 \\ 0 & -2 & -4 & -4 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ (-2) \\ + \end{array}$$

LGS mit drei Gleichungen und drei Unbekannten

$$
\begin{aligned}
x_1 + x_2 + 2x_3 &= 3 \\
2x_1 + x_2 + 2x_3 &= 4 \\
2x_1 \phantom{{}+ x_2 + 2x_3} &= 2
\end{aligned}
\qquad
\left(\begin{array}{ccc|c}
1 & 1 & 2 & 3 \\
2 & 1 & 2 & 4 \\
2 & 0 & 0 & 2
\end{array}\right)
\begin{array}{l}
(-2)\ (-2) \\
+ \\
+
\end{array}
$$

$$
\longrightarrow\quad
\begin{aligned}
x_1 + x_2 + 2x_3 &= 3 \\
-x_2 - 2x_3 &= -2 \\
-2x_2 - 4x_3 &= -4
\end{aligned}
\qquad
\left(\begin{array}{ccc|c}
1 & 1 & 2 & 3 \\
0 & -1 & -2 & -2 \\
0 & -2 & -4 & -4
\end{array}\right)
\begin{array}{l}
\\
(-2) \\
+
\end{array}
$$

$$
\longrightarrow\quad
\begin{aligned}
x_1 + x_2 + 2x_3 &= 3 \\
-x_2 - 2x_3 &= -2 \\
0 &= 0
\end{aligned}
\qquad
\left(\begin{array}{ccc|c}
1 & 1 & 2 & 3 \\
0 & -1 & -2 & -2 \\
0 & 0 & 0 & 0
\end{array}\right)
$$

$$
\begin{aligned}
& & x_1 + x_2 + 2x_3 &= 3 \\
&\longrightarrow & -x_2 - 2x_3 &= -2 \\
& & 0 &= 0
\end{aligned}
\qquad
\left(\begin{array}{ccc|c}
1 & 1 & 2 & 3 \\
0 & -1 & -2 & -2 \\
0 & 0 & 0 & 0
\end{array}\right)
$$

$$\longrightarrow \quad \begin{aligned} x_1 + \quad x_2 + 2x_3 &= 3 \\ -x_2 - 2x_3 &= -2 \\ 0 &= 0 \end{aligned} \qquad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\Longrightarrow x_3 \text{ ist frei wählbar: } x_3 = t \in \mathbb{R}$$

$$\overset{(II)}{\Longrightarrow} -x_2 - 2t = -2 \iff x_2 = 2 - 2t$$

$$\overset{(I)}{\Longrightarrow} x_1 + (2 - 2t) + 2t = 3 \iff x_1 = 1$$

$$\Longrightarrow \mathbb{L} = \left\{ \left(1,\ 2 - 2t,\ t \right),\ t \in \mathbb{R} \right\}$$