Kapitelübersicht

2. Gleichungen
   - Quadratische Gleichungen
   - Polynomgleichungen
   - Potenzgleichungen
   - Wurzelgleichungen
   - Gleichungen mit Beträgen
   - Exponentialgleichungen
   - Lineare Gleichungssysteme

Äquivalenzumformungen

Definition 2.1 (äquivalente Gleichungen)

Zwei Gleichungen, die die selbe Lösungsmenge haben, heißen *äquivalent* (man schreibt $\Longleftrightarrow$).

Vorkurs Mathematik

Grundlagen

Gleichungen

Quadratische Gleichungen

Polynomgleichungen

Potenzgleichungen

Wurzelgleichungen

Gleichungen mit Beträgen

Exponentialgleichungen

Lineare Gleichungssysteme

Ungleichungen

Funktionen

Folgen und Reihen

Grenzwerte und Stetigkeit

Äquivalenzumformungen

Definition 2.1 (äquivalente Gleichungen)

Zwei Gleichungen, die die selbe Lösungsmenge haben, heißen *äquivalent* (man schreibt $\Longleftrightarrow$).

Eine Gleichung *impliziert* eine andere Gleichung, wenn ihre Lösungsmenge eine Teilmenge der Lösungsmenge der zweiten Gleichung ist. In anderen Worten: Ist ein Wert Lösung der ersten Gleichung, dann auch der zweiten Gleichung (man schreibt $\Longrightarrow$). Die zweite Gleichung kann aber zusätzliche Lösungen haben, die die erste Gleichung nicht lösen.

Grundlagen
Gleichungen
Quadratische Gleichungen
Polynomgleichungen
Potenzgleichungen
Wurzelgleichungen
Gleichungen mit Beträgen
Exponentialgleichungen
Lineare Gleichungssysteme
Ungleichungen
Funktionen
Folgen und Reihen
Grenzwerte und Stetigkeit

Beispiel 2.2

- $-3x + 3 = 24 \iff x = -7$
- $x = 7 \implies x^2 = 49 \iff (x = 7 \lor x = -7)$

Grundlagen
Gleichungen
Quadratische Gleichungen
Polynomgleichungen
Potenzgleichungen
Wurzelgleichungen
Gleichungen mit Beträgen
Exponentialgleichungen
Lineare Gleichungssysteme
Ungleichungen
Funktionen
Folgen und Reihen
Grenzwerte und Stetigkeit

Beispiel 2.2

- $-3x + 3 = 24 \iff x = -7$
- $x = 7 \implies x^2 = 49 \iff (x = 7 \lor x = -7)$

elementare Äquivalenzumformungen

- Addition/Subtraktion einer reellen Zahl oder eines Terms auf beiden Seiten der Gleichung

Grundlagen
Gleichungen
Quadratische Gleichungen
Polynomgleichungen
Potenzgleichungen
Wurzelgleichungen
Gleichungen mit Beträgen
Exponentialgleichungen
Lineare Gleichungssysteme
Ungleichungen
Funktionen
Folgen und Reihen
Grenzwerte und Stetigkeit

Beispiel 2.2

- $-3x + 3 = 24 \iff x = -7$
- $x = 7 \implies x^2 = 49 \iff (x = 7 \vee x = -7)$

elementare Äquivalenzumformungen

- Addition/Subtraktion einer reellen Zahl oder eines Terms auf beiden Seiten der Gleichung
- Multiplikation/Division mit einer reellen Zahl *ungleich Null* oder mit einem Term, der *nicht gleich Null* ist.

Lösen von Gleichungen

Zunächst muss man bestimmen, für welche Werte eine Gleichung überhaupt zulässig ist, d. h. es muss die *Definitonsmenge* $\mathbb{D}$ der Gleichung bestimmt werden. Wenn keine weiteren Einschränkungen vorgegeben sind, nehmen wir als Grundmenge meist die reellen Zahlen an.
Bei jeder Umformung einer Gleichung muss man sich Klarheit darüber verschaffen, ob es sich um eine Äquivalenzumformung handelt.
Anschließend ergibt sich die Lösungsmenge der Gleichung als:

$$\mathbb{L} = \{x \in \mathbb{D} : \ x \text{ löst die Gleichung}\}$$

Grundlagen
Gleichungen
Quadratische Gleichungen
Polynomgleichungen
Potenzgleichungen
Wurzelgleichungen
Gleichungen mit Beträgen
Exponentialgleichungen
Lineare Gleichungssysteme
Ungleichungen
Funktionen
Folgen und Reihen
Grenzwerte und Stetigkeit

Beispiel 2.3

Für welche Werte von p gilt die Gleichung

$$6p - \frac{1}{2}(2p-3) = 3(1-p) - \frac{7}{6}(p+2)\ ?$$

Grundlagen
Gleichungen
Quadratische Gleichungen
Polynomgleichungen
Potenzgleichungen
Wurzelgleichungen
Gleichungen mit Beträgen
Exponentialgleichungen
Lineare Gleichungssysteme
Ungleichungen
Funktionen
Folgen und Reihen
Grenzwerte und Stetigkeit

Beispiel 2.3

Für welche Werte von p gilt die Gleichung

$$6p - \frac{1}{2}(2p-3) = 3(1-p) - \frac{7}{6}(p+2) \;?$$

Definitionsmenge der Gleichung: $\mathbb{D} = \mathbb{R}$

Lösen der Gleichung:

$$\begin{array}{rrcl|l} & 6p - \frac{1}{2}(2p-3) &=& 3(1-p) - \frac{7}{6}(p+2) & \text{ausmultiplizieren} \\ \Longleftrightarrow & 6p - p + \frac{3}{2} &=& 3 - 3p - \frac{7}{6}p - \frac{7}{3} & \text{zusammenfassen} \\ \Longleftrightarrow & 5\,p + \frac{3}{2} &=& \frac{2}{3} - \frac{25}{6}p & + \frac{25}{6}p - \frac{3}{2} \end{array}$$

Vorkurs Mathematik

Grundlagen

Gleichungen

Quadratische Gleichungen

Polynomgleichungen

Potenzgleichungen

Wurzelgleichungen

Gleichungen mit Beträgen

Exponentialgleichungen

Lineare Gleichungssysteme

Ungleichungen

Funktionen

Folgen und Reihen

Grenzwerte und Stetigkeit

Beispiel 2.3 (fort.)

$$
\begin{aligned}
\iff \frac{55}{6}p &= -\frac{5}{6} && \Big| \cdot \frac{6}{55} \\
\iff p &= -\frac{5}{6} \cdot \frac{6}{55} && \Big| \text{ kürzen} \\
\iff p &= -\frac{1}{11}
\end{aligned}
$$

Lösungsmenge: $\mathbb{L} = \{-\frac{1}{11}\}$

Grundlagen
Gleichungen
Quadratische Gleichungen
Polynomgleichungen
Potenzgleichungen
Wurzelgleichungen
Gleichungen mit Beträgen
Exponentialgleichungen
Lineare Gleichungssysteme
Ungleichungen
Funktionen
Folgen und Reihen
Grenzwerte und Stetigkeit

Beispiel 2.4

Für welche Werte von x gilt die Gleichung

$$\frac{2x^2 + 5x - 9}{x(x+3)} = \frac{2}{x+3} + 1\ ?$$

Vorkurs Mathematik
Grundlagen
Gleichungen
Quadratische Gleichungen
Polynomgleichungen
Potenzgleichungen
Wurzelgleichungen
Gleichungen mit Beträgen
Exponentialgleichungen
Lineare Gleichungssysteme
Ungleichungen
Funktionen
Folgen und Reihen
Grenzwerte und Stetigkeit

Beispiel 2.4

Für welche Werte von x gilt die Gleichung

$$\frac{2x^2+5x-9}{x(x+3)} = \frac{2}{x+3} + 1\ ?$$

Definitionsmenge der Gleichung: $\mathbb{D} = \mathbb{R} \setminus \{0, -3\}$ (da Division durch Null nicht erlaubt)

Lösen der Gleichung:

$$\frac{2x^2+5x-9}{x(x+3)} = \frac{2}{x+3} + 1 \qquad \Big|\ \cdot x(x+3)$$

$$\Longleftrightarrow 2x^2+5x-9 = 2x + x^2 + 3x \wedge x \neq 0 \wedge x \neq -3 \qquad \Big|\ -x^2-5x+9$$

Grundlagen
Gleichungen
Quadratische Gleichungen
Polynomgleichungen
Potenzgleichungen
Wurzelgleichungen
Gleichungen mit Beträgen
Exponentialgleichungen
Lineare Gleichungssysteme
Ungleichungen
Funktionen
Folgen und Reihen
Grenzwerte und Stetigkeit

Beispiel 2.4 (fort.)

$$\begin{aligned}
&\iff x^2 = 9 \wedge x \neq 0 \wedge x \neq -3 \\
&\iff (x = 3 \vee x = -3) \wedge x \neq 0 \wedge x \neq -3 \\
&\iff x = 3
\end{aligned}$$

Lösungsmenge: $\mathbb{L} = \{3\}$

Grundlagen
Gleichungen
Quadratische Gleichungen
Polynomgleichungen
Potenzgleichungen
Wurzelgleichungen
Gleichungen mit Beträgen
Exponentialgleichungen
Lineare Gleichungssysteme
Ungleichungen
Funktionen
Folgen und Reihen
Grenzwerte und Stetigkeit

Allgemeines Vorgehen

- Bestimmung der Definitionsmenge der Gleichung
- Mit Hilfe von Äquivalenzumformungen werden alle Terme in denen die Unbekannte auftritt auf eine Seite der Gleichung gebracht, alle Terme die unabhängig von der Unbekannten sind auf die andere Seite.
- Zusammenfassen der Terme auf beiden Seiten der Gleichung (z. B. durch Ausklammern), Isolierung der Unbekannten

Quadratische Gleichungen

Gesucht sind die Lösungen der quadratischen Gleichung

$$a\,x^2 + b\,x + c = 0 \text{ mit } a \neq 0\,.$$

Vorkurs Mathematik

Grundlagen

Gleichungen

Quadratische Gleichungen

Polynomgleichungen

Potenzgleichungen

Wurzelgleichungen

Gleichungen mit Beträgen

Exponentialgleichungen

Lineare Gleichungssysteme

Ungleichungen

Funktionen

Folgen und Reihen

Grenzwerte und Stetigkeit

Quadratische Gleichungen

Gesucht sind die Lösungen der quadratischen Gleichung

$$a\,x^2 + b\,x + c = 0 \text{ mit } a \neq 0\,.$$

Mit den Abkürzungen $p = \frac{b}{a}$ und $q = \frac{c}{a}$ ist dies äquivalent zu

$$x^2 + p\,x + q = 0$$

der quadratischen Gleichung in Normalform.

Vorkurs Mathematik

Grundlagen

Gleichungen

Quadratische Gleichungen

Polynomgleichungen

Potenzgleichungen

Wurzelgleichungen

Gleichungen mit Beträgen

Exponentialgleichungen

Lineare Gleichungssysteme

Ungleichungen

Funktionen

Folgen und Reihen

Grenzwerte und Stetigkeit

Quadratische Gleichungen

Gesucht sind die Lösungen der quadratischen Gleichung

$$a\,x^2 + b\,x + c = 0 \text{ mit } a \neq 0\,.$$

Mit den Abkürzungen $p = \frac{b}{a}$ und $q = \frac{c}{a}$ ist dies äquivalent zu

$$x^2 + p\,x + q = 0$$

der quadratischen Gleichung in Normalform.
Mittels quadratischer Ergänzung erhalten wir:

$$\begin{aligned}
& x^2 + p\,x + q = 0 && \Big|\text{quadratische Ergänzung} \\
\iff & \left(x + \frac{p}{2}\right)^2 - \left(\frac{p}{2}\right)^2 + q = 0 && \Big| + \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q \\
\iff & \left(x + \frac{p}{2}\right)^2 = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q
\end{aligned}$$

Vorkurs Mathematik
Grundlagen
Gleichungen
Quadratische Gleichungen
Polynomgleichungen
Potenzgleichungen
Wurzelgleichungen
Gleichungen mit Beträgen
Exponentialgleichungen
Lineare Gleichungssysteme
Ungleichungen
Funktionen
Folgen und Reihen
Grenzwerte und Stetigkeit

Es können nun verschiedene Fälle eintreten.

1. Fall: $(\frac{p}{2})^2 - q < 0$
2. Fall: $(\frac{p}{2})^2 - q = 0.$
3. Fall: $(\frac{p}{2})^2 - q > 0.$

Es können nun verschiedene Fälle eintreten.

1. Fall: $(\frac{p}{2})^2 - q < 0$
   Dann hat die quadratische Gleichung keine Lösung, da das Quadrat auf der linken Seite stets nichtnegativ ist: $\mathbb{L} = \{ \quad \}$.
2. Fall: $(\frac{p}{2})^2 - q = 0$.
3. Fall: $(\frac{p}{2})^2 - q > 0$.

Es können nun verschiedene Fälle eintreten.

1. Fall: $(\frac{p}{2})^2 - q < 0$
2. Fall: $(\frac{p}{2})^2 - q = 0$. Dann ist

$$\left(x + \frac{p}{2}\right)^2 = 0$$
$$\iff x + \frac{p}{2} = 0$$
$$\iff x = -\frac{p}{2}$$

Die quadratische Gleichung hat also eine (doppelte) Lösung, d. h. die Lösungsmenge $\mathbb{L} = \{-\frac{p}{2}\}$.

3. Fall: $(\frac{p}{2})^2 - q > 0$.

Es können nun verschiedene Fälle eintreten.

1. Fall: $(\frac{p}{2})^2 - q < 0$
2. Fall: $(\frac{p}{2})^2 - q = 0.$
3. Fall: $(\frac{p}{2})^2 - q > 0.$ Dann ist

$$\begin{aligned} \left(x + \frac{p}{2}\right)^2 &= \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q \\ \Longleftrightarrow x + \frac{p}{2} &= \pm\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q} \\ \Longleftrightarrow x &= -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q} \end{aligned}$$

Die quadratische Gleichung hat also zwei verschiedene Lösungen, wenn $(\frac{p}{2})^2 - q > 0$, d. h. die Lösungsmenge

$$\mathbb{L} = \left\{-\frac{p}{2} + \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q},\ -\frac{p}{2} - \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}\right\}.$$

Grundlagen
Gleichungen
Quadratische Gleichungen
Polynomgleichungen
Potenzgleichungen
Wurzelgleichungen
Gleichungen mit Beträgen
Exponentialgleichungen
Lineare Gleichungssysteme
Ungleichungen
Funktionen
Folgen und Reihen
Grenzwerte und Stetigkeit

Definition 2.5 (Diskriminante)

Der Term

$$\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q$$

heißt *Diskriminante* der quadratischen Gleichung $x^2 + p\,x + q = 0$.

Vorkurs Mathematik

Grundlagen

Gleichungen

Quadratische Gleichungen

Polynomgleichungen

Potenzgleichungen

Wurzelgleichungen

Gleichungen mit Beträgen

Exponentialgleichungen

Lineare Gleichungssysteme

Ungleichungen

Funktionen

Folgen und Reihen

Grenzwerte und Stetigkeit

Definition 2.5 (Diskriminante)

Der Term

$$\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q$$

heißt *Diskriminante* der quadratischen Gleichung $x^2 + p\,x + q = 0$.
Am Vorzeichen der Diskriminante kann man die Lösbarkeit der quadratischen Gleichung ablesen:

$$\left(\tfrac{p}{2}\right)^2 - q < 0 \implies \text{keine Lösung}$$

Definition 2.5 (Diskriminante)

Der Term

$$\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q$$

heißt *Diskriminante* der quadratischen Gleichung $x^2 + p\,x + q = 0$.
Am Vorzeichen der Diskriminante kann man die Lösbarkeit der quadratischen Gleichung ablesen:

$$\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q < 0 \implies \text{keine Lösung}$$
$$\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q = 0 \implies \text{eine (doppelte) Lösung}$$

Vorkurs Mathematik

Grundlagen
Gleichungen
Quadratische Gleichungen
Polynomgleichungen
Potenzgleichungen
Wurzelgleichungen
Gleichungen mit Beträgen
Exponentialgleichungen
Lineare Gleichungssysteme
Ungleichungen
Funktionen
Folgen und Reihen
Grenzwerte und Stetigkeit

Definition 2.5 (Diskriminante)

Der Term

$$\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q$$

heißt *Diskriminante* der quadratischen Gleichung $x^2 + p\,x + q = 0$.
Am Vorzeichen der Diskriminante kann man die Lösbarkeit der quadratischen Gleichung ablesen:

$$\left(\tfrac{p}{2}\right)^2 - q < 0 \implies \text{keine Lösung}$$
$$\left(\tfrac{p}{2}\right)^2 - q = 0 \implies \text{eine (doppelte) Lösung}$$
$$\left(\tfrac{p}{2}\right)^2 - q > 0 \implies \text{zwei verschiedene Lösungen}$$

Beispiel 2.6

Gesucht ist die Lösungsmenge der Gleichung: $x^2 - 3\,x + 2 = 0$.

Vorkurs Mathematik
Grundlagen
Gleichungen
Quadratische Gleichungen
Polynomgleichungen
Potenzgleichungen
Wurzelgleichungen
Gleichungen mit Beträgen
Exponentialgleichungen
Lineare Gleichungssysteme
Ungleichungen
Funktionen
Folgen und Reihen
Grenzwerte und Stetigkeit

Beispiel 2.6

Gesucht ist die Lösungsmenge der Gleichung: $x^2 - 3\,x + 2 = 0$.
Für die Diskriminante gilt $(\frac{3}{2})^2 - 2 = \frac{1}{4} > 0$; es gibt also zwei verschiedene reelle Lösungen.

$$\begin{aligned}
& x^2 - 3x + 2 = 0 \\
\iff & x = \frac{3}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{3}{2}\right)^2 - 2} \\
\iff & x = \frac{3}{2} \pm \frac{1}{2} \\
\iff & x = 2 \ \vee \ x = 1 \\
\implies & \mathbb{L} = \{1, 2\}
\end{aligned}$$

Beispiel 2.7

Gesucht ist die Lösungsmenge der Gleichung: $x^2 - x + 2 = 0$.

Vorkurs Mathematik

Grundlagen

Gleichungen

Quadratische Gleichungen

Polynomgleichungen

Potenzgleichungen

Wurzelgleichungen

Gleichungen mit Beträgen

Exponentialgleichungen

Lineare Gleichungssysteme

Ungleichungen

Funktionen

Folgen und Reihen

Grenzwerte und Stetigkeit

Beispiel 2.7

Gesucht ist die Lösungsmenge der Gleichung: $x^2 - x + 2 = 0$.
Für die Diskriminante gilt $(\frac{1}{2})^2 - 2 = -\frac{7}{4} < 0$; es gibt also keine reelle Lösung.
Somit: $\mathbb{L} = \{\ \}$

Faktorisierung

Hat man, falls vorhanden, die reellen Lösungen einer quadratischen Gleichung bestimmt, so kann man den quadratischen Term *faktorisieren*, d. h. den Term in *Linearfaktoren* zerlegen.

Faktorisierung

Hat man, falls vorhanden, die reellen Lösungen einer quadratischen Gleichung bestimmt, so kann man den quadratischen Term *faktorisieren*, d. h. den Term in *Linearfaktoren* zerlegen.

Sind x_1 und x_2 Lösungen der quadratischen Gleichung $x^2 + p\,x + q = 0$, so gilt:

$$x^2 + p\,x + q = (x - x_1)(x - x_2)\,.$$

Beispiel 2.8

Bestimmen Sie, falls möglich, die Zerlegung von $2x^2 + \frac{1}{3}x - \frac{2}{3}$ in Linearfaktoren.

Beispiel 2.8

Bestimmen Sie, falls möglich, die Zerlegung von $2x^2 + \frac{1}{3}x - \frac{2}{3}$ in Linearfaktoren.

Wir berechnen dazu die Lösungen der Gleichung $2x^2 + \frac{1}{3}x - \frac{2}{3} = 0$

Für die Diskriminante gilt $(\frac{1}{12})^2 + \frac{1}{3} = \frac{49}{144} > 0$; es gibt also zwei verschiedene reelle Lösungen.

Vorkurs Mathematik

Grundlagen

Gleichungen

Quadratische Gleichungen

Polynomgleichungen

Potenzgleichungen

Wurzelgleichungen

Gleichungen mit Beträgen

Exponentialgleichungen

Lineare Gleichungssysteme

Ungleichungen

Funktionen

Folgen und Reihen

Grenzwerte und Stetigkeit

Beispiel 2.8 (fort.)

$$\begin{aligned} & x^2 + \frac{1}{6}x - \frac{1}{3} = 0 \\ \iff & x = -\frac{1}{12} \pm \sqrt{\left(\frac{1}{12}\right)^2 + \frac{1}{3}} \\ \iff & x = -\frac{1}{12} \pm \frac{7}{12} \\ \iff & x = \frac{1}{2} \vee x = -\frac{2}{3} \\ \implies & \mathbb{L} = \left\{\frac{1}{2}, -\frac{2}{3}\right\} \end{aligned}$$

Der quadratische Term lässt sich also in Linearfaktoren zerlegen:

$$2x^2 + \frac{1}{3}x - \frac{2}{3} = 2\left(x - \frac{1}{2}\right)\left(x + \frac{2}{3}\right)$$

Vorkurs Mathematik

Grundlagen

Gleichungen

Quadratische Gleichungen

Polynomgleichungen

Potenzgleichungen

Wurzelgleichungen

Gleichungen mit Beträgen

Exponentialgleichungen

Lineare Gleichungssysteme

Ungleichungen

Funktionen

Folgen und Reihen

Grenzwerte und Stetigkeit

Spezialfälle quadratischer Gleichungen

Ist in einer quadratischen Gleichung $c = 0$, so lässt sich $ax^2 + bx = 0$ einfacher durch Ausklammern lösen.

Merke: *Die Gleichung darf nicht durch x dividiert werden. Die Lösung $x = 0$ würde sonst „verloren gehen“.*

Spezialfälle quadratischer Gleichungen

Ist in einer quadratischen Gleichung $c = 0$, so lässt sich $ax^2 + bx = 0$ einfacher durch Ausklammern lösen.

Merke: *Die Gleichung darf nicht durch x dividiert werden. Die Lösung $x = 0$ würde sonst „verloren gehen“.*

Beispiel 2.9

Gesucht sind die Lösungen der Gleichung $2x^2 + 3x = 0$.

Spezialfälle quadratischer Gleichungen

Ist in einer quadratischen Gleichung $c = 0$, so lässt sich $ax^2 + bx = 0$ einfacher durch Ausklammern lösen.

Merke: *Die Gleichung darf nicht durch x dividiert werden. Die Lösung $x = 0$ würde sonst „verloren gehen“.*

Beispiel 2.9

Gesucht sind die Lösungen der Gleichung $2x^2 + 3x = 0$.

$$\begin{aligned} 2x^2 + 3x = 0 &\Longleftrightarrow x(2x+3) = 0 \\ &\Longleftrightarrow x = 0 \ \vee \ 2x + 3 = 0 \\ &\Longleftrightarrow x = 0 \ \vee \ x = -\frac{3}{2} \\ &\Longrightarrow \mathbb{L} = \left\{0, -\frac{3}{2}\right\} \end{aligned}$$

Spezialfälle quadratischer Gleichungen

Einige quadratische Gleichungen lassen sich auch einfach durch Anwendung einer binomischen Formel lösen.

$$
\begin{aligned}
(a+b)^2 &= a^2 + 2ab + b^2 \\
(a-b)^2 &= a^2 - 2ab + b^2 \\
(a-b)(a+b) &= a^2 - b^2
\end{aligned}
$$

Beispiel 2.10

Gesucht sind die Lösungen der Gleichung $4\,x^2 - 12\,x + 9 = 0$.

Vorkurs Mathematik

Grundlagen

Gleichungen

Quadratische Gleichungen

Polynomgleichungen

Potenzgleichungen

Wurzelgleichungen

Gleichungen mit Beträgen

Exponentialgleichungen

Lineare Gleichungssysteme

Ungleichungen

Funktionen

Folgen und Reihen

Grenzwerte und Stetigkeit

Beispiel 2.10

Gesucht sind die Lösungen der Gleichung $4\,x^2 - 12\,x + 9 = 0$.

$$\begin{aligned} 4\,x^2 + 12\,x + 9 = 0 &\iff (2x - 3)^2 = 0 \\ &\iff 2x - 3 = 0 \\ &\iff x = \frac{3}{2} \\ &\implies \mathbb{L} = \left\{\frac{3}{2}\right\} \end{aligned}$$

Polynomgleichungen

Gleichungen der Form

$$\sum_{i=0}^{n} a_i\, x^i = 0$$

also zum Beispiel $3\,x^7 - 5\,x^4 + 2\,x = 0$ werden wir im Kapitel 3 untersuchen, da diese Gleichungen auch bei der Bestimmung der Nullstellen von Polynomfunktionen auftreten.

Grundlagen
Gleichungen
Quadratische Gleichungen
Polynomgleichungen
Potenzgleichungen
Wurzelgleichungen
Gleichungen mit Beträgen
Exponentialgleichungen
Lineare Gleichungssysteme
Ungleichungen
Funktionen
Folgen und Reihen
Grenzwerte und Stetigkeit

Gleichungen der Form $x^n = a$

Beispiel 2.11

a) $x^4 = 16$

Gleichungen der Form $x^n = a$

Beispiel 2.11

a) $$x^4 = 16 \iff x = \pm\sqrt[4]{16}$$
$$\iff x = -2 \vee x = 2$$
$$\implies \mathbb{L} = \{-2, 2\}$$

Vorkurs Mathematik

Grundlagen

Gleichungen

Quadratische Gleichungen

Polynomgleichungen

Potenzgleichungen

Wurzelgleichungen

Gleichungen mit Beträgen

Exponentialgleichungen

Lineare Gleichungssysteme

Ungleichungen

Funktionen

Folgen und Reihen

Grenzwerte und Stetigkeit

Gleichungen der Form $x^n = a$

Beispiel 2.11

a) $x^4 = 16 \iff x = \pm\sqrt[4]{16}$

$\iff x = -2 \vee x = 2$

$\implies \mathbb{L} = \{-2, 2\}$

b) $x^6 = -64$

Gleichungen der Form $x^n = a$

Beispiel 2.11

a) $x^4 = 16 \iff x = \pm\sqrt[4]{16}$

$\iff x = -2 \vee x = 2$

$\implies \mathbb{L} = \{-2, 2\}$

b) $x^6 = -64$ ist in $\mathbb{R}$ nicht lösbar, da bei einem geraden Exponenten die Potenz nicht negativ werden kann.

$\implies \mathbb{L} = \{\ \}$

Gleichungen der Form $x^n = a$

Beispiel 2.11

a) $x^4 = 16 \iff x = \pm\sqrt[4]{16}$

$\iff x = -2 \lor x = 2$

$\implies \mathbb{L} = \{-2, 2\}$

b) $x^6 = -64$ ist in $\mathbb{R}$ nicht lösbar, da bei einem geraden Exponenten die Potenz nicht negativ werden kann.

$\implies \mathbb{L} = \{\ \}$

c) $x^3 = -64$

Gleichungen der Form $x^n = a$

Beispiel 2.11

a) $x^4 = 16 \iff x = \pm\sqrt[4]{16}$
$\iff x = -2 \vee x = 2$
$\implies \mathbb{L} = \{-2, 2\}$

b) $x^6 = -64$ ist in $\mathbb{R}$ nicht lösbar, da bei einem geraden Exponenten die Potenz nicht negativ werden kann.
$\implies \mathbb{L} = \{\,\}$

c) $x^3 = -64 \iff x = -\sqrt[3]{64}$
$\iff x = -4$
$\implies \mathbb{L} = \{-4\}$

Vorkurs Mathematik

Grundlagen

Gleichungen

Quadratische Gleichungen

Polynomgleichungen

Potenzgleichungen

Wurzelgleichungen

Gleichungen mit Beträgen

Exponentialgleichungen

Lineare Gleichungssysteme

Ungleichungen

Funktionen

Folgen und Reihen

Grenzwerte und Stetigkeit

Lösung von Gleichungen der Form $x^n = a$

Allgemein gilt für die Lösungsmenge einer Gleichung der Form $x^n = a$ mit $a \in \mathbb{R}$ und $n \in \mathbb{N}$:

n gerade und $a > 0: \quad \mathbb{L} = \{-\sqrt[n]{a}, \sqrt[n]{a}\}$

Vorkurs Mathematik

Grundlagen

Gleichungen

Quadratische Gleichungen

Polynomgleichungen

Potenzgleichungen

Wurzelgleichungen

Gleichungen mit Beträgen

Exponentialgleichungen

Lineare Gleichungssysteme

Ungleichungen

Funktionen

Folgen und Reihen

Grenzwerte und Stetigkeit

Lösung von Gleichungen der Form $x^n = a$

Allgemein gilt für die Lösungsmenge einer Gleichung der Form $x^n = a$ mit $a \in \mathbb{R}$ und $n \in \mathbb{N}$:

$$n \text{ gerade und } a > 0 : \quad \mathbb{L} = \{-\sqrt[n]{a}, \sqrt[n]{a}\}$$

$$n \text{ gerade und } a = 0 : \quad \mathbb{L} = \{0\}$$

Vorkurs Mathematik
Grundlagen
Gleichungen
Quadratische Gleichungen
Polynomgleichungen
Potenzgleichungen
Wurzelgleichungen
Gleichungen mit Beträgen
Exponentialgleichungen
Lineare Gleichungssysteme
Ungleichungen
Funktionen
Folgen und Reihen
Grenzwerte und Stetigkeit

Lösung von Gleichungen der Form $x^n = a$

Allgemein gilt für die Lösungsmenge einer Gleichung der Form $x^n = a$ mit $a \in \mathbb{R}$ und $n \in \mathbb{N}$:

$$n \text{ gerade und } a > 0: \quad \mathbb{L} = \{-\sqrt[n]{a}, \sqrt[n]{a}\}$$

$$n \text{ gerade und } a = 0: \quad \mathbb{L} = \{0\}$$

$$n \text{ gerade und } a < 0: \quad \mathbb{L} = \{\ \}$$

Vorkurs Mathematik

Grundlagen

Gleichungen

Quadratische Gleichungen

Polynomgleichungen

Potenzgleichungen

Wurzelgleichungen

Gleichungen mit Beträgen

Exponentialgleichungen

Lineare Gleichungssysteme

Ungleichungen

Funktionen

Folgen und Reihen

Grenzwerte und Stetigkeit

Lösung von Gleichungen der Form $x^n = a$

Allgemein gilt für die Lösungsmenge einer Gleichung der Form $x^n = a$ mit $a \in \mathbb{R}$ und $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned}
n \text{ gerade und } a > 0: &\quad \mathbb{L} = \{-\sqrt[n]{a}, \sqrt[n]{a}\} \\
n \text{ gerade und } a = 0: &\quad \mathbb{L} = \{0\} \\
n \text{ gerade und } a < 0: &\quad \mathbb{L} = \{\ \} \\
n \text{ ungerade und } a > 0: &\quad \mathbb{L} = \{\sqrt[n]{a}\}
\end{aligned}$$

Lösung von Gleichungen der Form $x^n = a$

Allgemein gilt für die Lösungsmenge einer Gleichung der Form $x^n = a$ mit $a \in \mathbb{R}$ und $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned}
n \text{ gerade und } a > 0: &\quad \mathbb{L} = \{-\sqrt[n]{a}, \sqrt[n]{a}\} \\
n \text{ gerade und } a = 0: &\quad \mathbb{L} = \{0\} \\
n \text{ gerade und } a < 0: &\quad \mathbb{L} = \{\ \} \\
n \text{ ungerade und } a > 0: &\quad \mathbb{L} = \{\sqrt[n]{a}\} \\
n \text{ ungerade und } a = 0: &\quad \mathbb{L} = \{0\}
\end{aligned}$$

Lösung von Gleichungen der Form $x^n = a$

Allgemein gilt für die Lösungsmenge einer Gleichung der Form $x^n = a$ mit $a \in \mathbb{R}$ und $n \in \mathbb{N}$:

$$
\begin{aligned}
n \text{ gerade und } a > 0 :&\quad \mathbb{L} = \{-\sqrt[n]{a}, \sqrt[n]{a}\}\\
n \text{ gerade und } a = 0 :&\quad \mathbb{L} = \{0\}\\
n \text{ gerade und } a < 0 :&\quad \mathbb{L} = \{\ \}\\
n \text{ ungerade und } a > 0 :&\quad \mathbb{L} = \{\sqrt[n]{a}\}\\
n \text{ ungerade und } a = 0 :&\quad \mathbb{L} = \{0\}\\
n \text{ ungerade und } a < 0 :&\quad \mathbb{L} = \{-\sqrt[n]{-a}\}
\end{aligned}
$$

Wurzelgleichungen

Gleichungen, in denen die Unbekannte als Argument von einer (oder mehreren Wurzeln) vorkommt, nennt man Wurzelgleichungen.

Wurzelgleichungen

Gleichungen, in denen die Unbekannte als Argument von einer (oder mehreren Wurzeln) vorkommt, nennt man Wurzelgleichungen.

Beispiel 2.12

$$\sqrt{3-2x} = 7$$

Grundlagen
Gleichungen
Quadratische Gleichungen
Polynomgleichungen
Potenzgleichungen
Wurzelgleichungen
Gleichungen mit Beträgen
Exponentialgleichungen
Lineare Gleichungssysteme
Ungleichungen
Funktionen
Folgen und Reihen
Grenzwerte und Stetigkeit

Wurzelgleichungen

Gleichungen, in denen die Unbekannte als Argument von einer (oder mehreren Wurzeln) vorkommt, nennt man Wurzelgleichungen.

Beispiel 2.12

$$\sqrt{3-2x} = 7 \qquad \mathbb{D} = \left(-\infty, \tfrac{3}{2}\right]$$

Wurzelgleichungen

Gleichungen, in denen die Unbekannte als Argument von einer (oder mehreren Wurzeln) vorkommt, nennt man Wurzelgleichungen.

Beispiel 2.12

$$\sqrt{3-2x} = 7 \qquad \mathbb{D} = \left(-\infty, \tfrac{3}{2}\right]$$

$$\Longrightarrow 3 - 2x = 49$$

$$\Longleftrightarrow -2x = 46$$

$$\Longleftrightarrow x = -23$$

Vorkurs Mathematik

Grundlagen

Gleichungen

Quadratische Gleichungen

Polynomgleichungen

Potenzgleichungen

Wurzelgleichungen

Gleichungen mit Beträgen

Exponentialgleichungen

Lineare Gleichungssysteme

Ungleichungen

Funktionen

Folgen und Reihen

Grenzwerte und Stetigkeit

Lösungsstrategie von Wurzelgleichungen

1. Bestimmen der Definitionsmenge
2. Eliminieren der Wurzeln durch Potenzieren der Gleichung mit dem selben Exponenten (bei Quadratwurzeln Quadrieren). Der Wurzelterm sollte dazu isoliert auf einer Seite der Gleichung stehen (alle anderen Terme auf der anderen Seite).
3. Sind alle Wurzeln eliminiert, kann die Lösung der entstandenen Gleichung bestimmt werden.
4. Probe: Einsetzen der Lösungen in die Ursprungsgleichung, Überprüfung ob die errechneten Werte die ursprüngliche Gleichung lösen.

Grundlagen
Gleichungen
Quadratische Gleichungen
Polynomgleichungen
Potenzgleichungen
Wurzelgleichungen
Gleichungen mit Beträgen
Exponentialgleichungen
Lineare Gleichungssysteme
Ungleichungen
Funktionen
Folgen und Reihen
Grenzwerte und Stetigkeit

Beispiel 2.13 (Warum braucht man eine Probe?)

$$\sqrt{5\,x^2 - 8} = x$$

Beispiel 2.13 (Warum braucht man eine Probe?)

$$\sqrt{5\,x^2 - 8} = x \qquad \mathbb{D} = \mathbb{R} \setminus \left(-2\,\sqrt{\tfrac{2}{5}},\, 2\,\sqrt{\tfrac{2}{5}}\right)$$

Grundlagen
Gleichungen
Quadratische Gleichungen
Polynomgleichungen
Potenzgleichungen
Wurzelgleichungen
Gleichungen mit Beträgen
Exponentialgleichungen
Lineare Gleichungssysteme
Ungleichungen
Funktionen
Folgen und Reihen
Grenzwerte und Stetigkeit

Beispiel 2.13 (Warum braucht man eine Probe?)

$$\sqrt{5\,x^2 - 8} = x \qquad \mathbb{D} = \mathbb{R} \setminus \left(-2\sqrt{\tfrac{2}{5}},\, 2\sqrt{\tfrac{2}{5}}\right)$$

$$\Longrightarrow 5\,x^2 - 8 = x^2$$

$$\Longleftrightarrow 4\,x^2 = 8$$

$$\Longleftrightarrow x^2 = 2$$

$$\Longleftrightarrow x = \sqrt{2} \;\vee\; x = -\sqrt{2}$$

$$\overset{\text{Probe}}{\Longrightarrow} x = \sqrt{2}$$

Beispiel 2.13 (Warum braucht man eine Probe?)

$$\sqrt{5\,x^2 - 8} = x \qquad \mathbb{D} = \mathbb{R} \setminus \left(-2\sqrt{\tfrac{2}{5}},\, 2\sqrt{\tfrac{2}{5}}\right)$$

$$\Longrightarrow 5\,x^2 - 8 = x^2$$

$$\Longleftrightarrow 4\,x^2 = 8$$

$$\Longleftrightarrow x^2 = 2$$

$$\Longleftrightarrow x = \sqrt{2} \;\vee\; x = -\sqrt{2}$$

$$\overset{\text{Probe}}{\Longrightarrow} x = \sqrt{2}$$

Bemerkung 2.14

Das Quadrieren der Gleichung ist keine Äquivalenzumformung, sondern nur eine Implikation. Das heißt, die neue Gleichung hat unter Umständen mehr Lösungen als die Ursprungsgleichung.

Vorkurs Mathematik

Grundlagen

Gleichungen

Quadratische Gleichungen

Polynomgleichungen

Potenzgleichungen

Wurzelgleichungen

Gleichungen mit Beträgen

Exponentialgleichungen

Lineare Gleichungssysteme

Ungleichungen

Funktionen

Folgen und Reihen

Grenzwerte und Stetigkeit

Beispiel 2.15

$$\sqrt{1+\sqrt{x}} = \sqrt{x-1}$$

Vorkurs Mathematik

Grundlagen

Gleichungen

Quadratische Gleichungen

Polynomgleichungen

Potenzgleichungen

Wurzelgleichungen

Gleichungen mit Beträgen

Exponentialgleichungen

Lineare Gleichungssysteme

Ungleichungen

Funktionen

Folgen und Reihen

Grenzwerte und Stetigkeit

Beispiel 2.15

$$\sqrt{1+\sqrt{x}} = \sqrt{x-1} \qquad \mathbb{D} = [1, \infty)$$

Beispiel 2.15

$$\begin{aligned}
&\sqrt{1+\sqrt{x}} = \sqrt{x-1} \qquad \mathbb{D} = [1,\infty) \\
\Longrightarrow\ & 1+\sqrt{x} = x-1 \\
\Longleftrightarrow\ & \sqrt{x} = x-2 \\
\Longrightarrow\ & x = x^2 - 4\,x + 4 \\
\Longleftrightarrow\ & x^2 - 5\,x + 4 = 0 \\
\Longleftrightarrow\ & (x-1)(x-4) = 0 \\
\Longleftrightarrow\ & x = 1 \ \vee\ x = 4
\end{aligned}$$

Durch Einsetzen in die Ursprungsgleichung stellt man fest, dass nur $x = 4$ Lösung ist $\implies \mathbb{L} = \{4\}$

Gleichungen mit Beträgen

Beim Lösen von Gleichungen mit Beträgen ist es wichtig, genau auf die nötigen Fallunterscheidungen zu achten.
Für jeden einzelnen Betrag muss dazu überlegt werden, für welche Werte der Variablen das Argument des Betrags positiv oder negativ ist.

Beispiel 2.16

Gesucht sind die Lösungen der Gleichung

$$|3x - 2| = 5\,.$$

Grundlagen
Gleichungen
Quadratische Gleichungen
Polynomgleichungen
Potenzgleichungen
Wurzelgleichungen
Gleichungen mit Beträgen
Exponentialgleichungen
Lineare Gleichungssysteme
Ungleichungen
Funktionen
Folgen und Reihen
Grenzwerte und Stetigkeit

Beispiel 2.16

Gesucht sind die Lösungen der Gleichung

$$|3x - 2| = 5\,.$$

$$|3x - 2| = \begin{cases} 3x - 2 & \text{falls } x \geq \frac{2}{3} \\ 2 - 3x & \text{falls } x < \frac{2}{3} \end{cases}$$

Vorkurs Mathematik

Grundlagen

Gleichungen

Quadratische Gleichungen

Polynomgleichungen

Potenzgleichungen

Wurzelgleichungen

Gleichungen mit Beträgen

Exponentialgleichungen

Lineare Gleichungssysteme

Ungleichungen

Funktionen

Folgen und Reihen

Grenzwerte und Stetigkeit

Beispiel 2.16 (fort.)

1. Fall: $x \geq \frac{2}{3}$.

$$
\begin{aligned}
&|3x - 2| = 5 \\
\iff\ & 3x - 2 = 5 \\
\iff\ & 3x = 7 \\
\iff\ & x = \frac{7}{3} \\
\implies\ & \mathbb{L}_1 = \left\{\frac{7}{3}\right\}
\end{aligned}
$$

Beispiel 2.16 (fort.)

1. Fall: $x \geq \frac{2}{3}$.

$$
\begin{aligned}
&|3x-2| = 5\\
\iff\ & 3x-2=5\\
\iff\ & 3x=7\\
\iff\ & x=\frac{7}{3}\\
\implies\ & \mathbb{L}_1 = \left\{\frac{7}{3}\right\}
\end{aligned}
$$

2. Fall: $x < \frac{2}{3}$.

$$
\begin{aligned}
&|3x-2| = 5\\
\iff\ & 2-3x=5\\
\iff\ & -3x=3\\
\iff\ & x=-1\\
\implies\ & \mathbb{L}_2 = \{-1\}
\end{aligned}
$$

Beispiel 2.16 (fort.)

1. Fall: $x \geq \frac{2}{3}$.

$$\begin{aligned} |3x-2| &= 5 \\ \iff 3x-2 &= 5 \\ \iff 3x &= 7 \\ \iff x &= \frac{7}{3} \\ \implies \mathbb{L}_1 &= \left\{\frac{7}{3}\right\} \end{aligned}$$

2. Fall: $x < \frac{2}{3}$.

$$\begin{aligned} |3x-2| &= 5 \\ \iff 2-3x &= 5 \\ \iff -3x &= 3 \\ \iff x &= -1 \\ \implies \mathbb{L}_2 &= \{-1\} \end{aligned}$$

Die Lösungsmenge von $|3x-2| = 5$ ergibt sich nun als Vereinigungsmenge von $\mathbb{L}_1$ und $\mathbb{L}_2$, d. h.

$$\mathbb{L} = \mathbb{L}_1 \cup \mathbb{L}_2 = \left\{-1, \frac{7}{3}\right\}.$$

Beispiel 2.17

Gesucht sind die Lösungen der Gleichung

$$|3x - 2| = |x - 5| \,.$$

Beispiel 2.17

Gesucht sind die Lösungen der Gleichung

$$|3x-2| = |x-5|\,.$$

$$|3x-2| = \begin{cases} 3x-2 & \text{falls } x \geq \frac{2}{3} \\ 2-3x & \text{falls } x < \frac{2}{3} \end{cases}$$

$$|x-5| = \begin{cases} x-5 & \text{falls } x \geq 5 \\ 5-x & \text{falls } x < 5 \end{cases}$$

Damit müssen drei Fälle betrachtet werden: $x < \frac{2}{3}$, $\frac{2}{3} \leq x < 5$ und $x \geq 5$.

Beispiel 2.17 (fort.)

1. Fall: $x \geq 5$.

$$\begin{aligned} & |3x-2| = |x-5| \\ \iff & 3x-2 = x-5 \\ \iff & 2x = -3 \\ \iff & x = -\frac{3}{2} \qquad \xRightarrow{-\frac{3}{2} \not\geq 5} \mathbb{L}_1 = \{\ \} \end{aligned}$$

2. Fall: $\frac{2}{3} \leq x < 5$.

$$\begin{aligned} & |3x-2| = |x-5| \\ \iff & 3x-2 = 5-x \\ \iff & 4x = 7 \\ \iff & x = \frac{7}{4} \qquad \Longrightarrow \mathbb{L}_2 = \left\{\frac{7}{4}\right\} \end{aligned}$$

Beispiel 2.17 (fort.)

3. Fall: $x < \frac{2}{3}$.

$$\begin{aligned} |3x-2| &= |x-5| \\ \iff 2-3x &= 5-x \\ \iff -3 &= 2x \\ \iff x &= -\frac{3}{2} \qquad \Longrightarrow \mathbb{L}_3 = \left\{-\frac{3}{2}\right\} \end{aligned}$$

Die Lösungsmenge von $|3x-2| = |x-5|$ ergibt sich wieder als Vereinigungsmenge der einzelnen Lösungsmengen, d. h.

$$\mathbb{L} = \mathbb{L}_1 \cup \mathbb{L}_2 \cup \mathbb{L}_3 = \left\{-\frac{3}{2}, \frac{7}{4}\right\}.$$

Bemerkung 2.18

Zur Lösung von Gleichungen mit Beträgen muss jeder Betrag mittels Fallunterscheidung aufgelöst werden. Damit erhält man für jeden dieser Fälle eine Gleichung, die auf einem Intervall gültig ist.
Eine Lösung einer solchen *Teilintervall-Gleichung* ist jedoch nur dann Lösung der Betragsgleichung, wenn sie innerhalb des zugehörigen Intervalls liegt.

Exponentialgleichungen

Die Lösung einer einfachen Exponentialgleichung

$$a^x = b \qquad \text{mit } a, b > 0,\ a \neq 1$$

erhält man durch Anwenden des Logarithmus zur Basis a als

$$x = \log_a b\,,$$

da $\log_a a^x = x \cdot \log_a a = x$.

Vorkurs Mathematik
Grundlagen
Gleichungen
Quadratische Gleichungen
Polynomgleichungen
Potenzgleichungen
Wurzelgleichungen
Gleichungen mit Beträgen
Exponentialgleichungen
Lineare Gleichungssysteme
Ungleichungen
Funktionen
Folgen und Reihen
Grenzwerte und Stetigkeit

Beispiel 2.19

$$15^x = \frac{1}{225}$$

Beispiel 2.19

$$15^x = \frac{1}{225}$$

$$\begin{aligned}
&\iff x = \log_{15} \frac{1}{225} \\
&\iff x = \log_{15} 15^{-2} \\
&\iff x = -2 \\
&\implies \mathbb{L} = \{-2\}
\end{aligned}$$

Grundlagen
Gleichungen
Quadratische Gleichungen
Polynomgleichungen
Potenzgleichungen
Wurzelgleichungen
Gleichungen mit Beträgen
Exponentialgleichungen
Lineare Gleichungssysteme
Ungleichungen
Funktionen
Folgen und Reihen
Grenzwerte und Stetigkeit

Beispiel 2.20

$$2^x = 3$$

Beispiel 2.20

$$2^x = 3$$

$$\iff x = \log_2 3$$

$$\implies \mathbb{L} = \{\log_2 3\}$$

Grundlagen
Gleichungen
Quadratische Gleichungen
Polynomgleichungen
Potenzgleichungen
Wurzelgleichungen
Gleichungen mit Beträgen
Exponentialgleichungen
Lineare Gleichungssysteme
Ungleichungen
Funktionen
Folgen und Reihen
Grenzwerte und Stetigkeit

Beispiel 2.20

$$\begin{aligned} 2^x &= 3 \\ \iff x &= \log_2 3 \\ \implies \mathbb{L} &= \{\log_2 3\} \end{aligned}$$

Will man mit dem Taschenrechner einen Näherungswert für die Lösung berechnen, so muss man $\log_2 3$ in einen Quotienten aus Logarithmen zur Basis 10 oder e umwandeln, d. h.

$$\log_2 3 = \frac{\lg 3}{\lg 2} = \frac{\ln 3}{\ln 2} \approx 1{,}58\,.$$

Beispiel 2.21 (Radioaktiver Zerfall)

Zur Erkennung von einigen Schilddrüsenerkrankungen wird vom Patienten eine sog. Schilddrüsenszintigraphie aufgenommen. Dem Patient wird dazu radioaktives Jod (meist $^{123}\mathrm{I}$ oder $^{131}\mathrm{I}$) gespritzt, dieses lagert sich in der Schilddrüse ab. Die während des Zerfallsprozesses abgegebene γ-Strahlung wird von einem Detektor aufgefangen, wodurch eine Bildaufnahme der Schilddrüse berechnet werden kann. $^{123}\mathrm{I}$ besitzt eine Halbwertszeit von ca. 13 Stunden, $^{131}\mathrm{I}$ von ca. 8 Tagen. Nach wie vielen Stunden sind weniger als 1 Promille der Anfangsdosis vorhanden?

Beispiel 2.21 (fort.)

Wir bezeichnen die Anfangsdosis mit D_0 und die im Körper verbliebene Dosis radioaktiven Jods nach der Zeit t mit $D(t)$ (wir rechnen t einheitlich in Stunden um).

Für $^{123}\mathrm{I}$:

$$\lambda_1 = \frac{\ln 2}{13}$$

$$D(t_1) = 0,001 \cdot D_0 = D_0\, e^{-\lambda_1\, t_1}$$
$$\iff \ln 0,001 = -\lambda_1\, t_1$$
$$\iff t_1 = -\frac{\ln 0,001}{\lambda_1} \approx 129,56$$

Für $^{131}\mathrm{I}$:

$$\lambda_2 = \frac{\ln 2}{192}$$

$$D(t_2) = 0,001 \cdot D_0 = D_0\, e^{-\lambda_2\, t_2}$$
$$\iff \ln 0,001 = -\lambda_2\, t_2$$
$$\iff t_2 = -\frac{\ln 0,001}{\lambda_2} \approx 1913,43$$

Grundlagen
Gleichungen
Quadratische Gleichungen
Polynomgleichungen
Potenzgleichungen
Wurzelgleichungen
Gleichungen mit Beträgen
Exponentialgleichungen
Lineare Gleichungssysteme
Ungleichungen
Funktionen
Folgen und Reihen
Grenzwerte und Stetigkeit

Beispiel 2.22

Ein DIN-A4-Blatt hat eine Stärke von etwa $0,06\,\text{mm}$. Wie oft müsste man das Blatt falten, bis die Dicke des gefalteten Blattes so groß ist, wie die Entfernung Erde – Mond (ca. $300000\,\text{km}$)?

Beispiel 2.22

Ein DIN-A4-Blatt hat eine Stärke von etwa $0,06\,\text{mm}$. Wie oft müsste man das Blatt falten, bis die Dicke des gefalteten Blattes so groß ist, wie die Entfernung Erde – Mond (ca. $300000\,\text{km}$)?

Umrechnung in km: $0,06\,\text{mm} = 6 \cdot 10^{-8}\,\text{km}$

$$\begin{aligned} 6 \cdot 10^{-8} \cdot 2^x &= 300000 \\ 2^x &= 50000 \cdot 10^8 = 5 \cdot 10^{12} \\ x &= \log_2\left(5 \cdot 10^{12}\right) = \log_2 5 + 12 \log_2 10 = \frac{\lg 5}{\lg 2} + 12\,\frac{1}{\lg 2} \approx 42,185 \end{aligned}$$

Man muss das Papier also nur 43-mal falten!

Vorkurs Mathematik

Grundlagen

Gleichungen

Quadratische Gleichungen

Polynomgleichungen

Potenzgleichungen

Wurzelgleichungen

Gleichungen mit Beträgen

Exponentialgleichungen

Lineare Gleichungssysteme

Ungleichungen

Funktionen

Folgen und Reihen

Grenzwerte und Stetigkeit

Lineare Gleichungssysteme I

Beispiel 2.23

In der Schaltung
sind die Spannung U und die Widerstände R_1, R_2, R_3 gegeben.
Bestimmen Sie die Ströme I_1, I_2 und I_3.

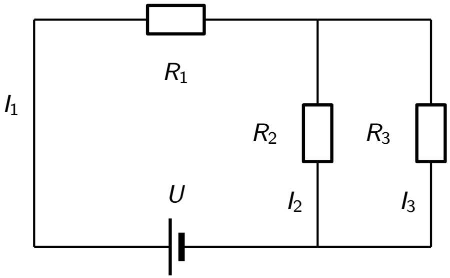

Abbildung: Schaltung

Beispiel 2.23 (fort.)

Aus den Kirchhoffschen Gesetzen folgen die Gleichungen:

$$\begin{aligned} I_2 + I_3 &= I_1 \\ I_1\,R_1 + I_3\,R_3 &= U \\ I_2\,R_2 &= I_3\,R_3 \end{aligned}$$

Lösen linearer Gleichungssysteme mit zwei Gleichungen und Unbekannten

Cramersche Regel

Sei also

$$\begin{aligned} (1) \quad & a_{11}\,x_1 + a_{12}\,x_2 = b_1 \\ (2) \quad & a_{21}\,x_1 + a_{22}\,x_2 = b_2, \end{aligned}$$

ein lineares Gleichungssystem (kurz „LGS“), wobei nicht alle Koeffizienten Null sein sollen.

Vorkurs Mathematik
Grundlagen
Gleichungen
Quadratische Gleichungen
Polynomgleichungen
Potenzgleichungen
Wurzelgleichungen
Gleichungen mit Beträgen
Exponentialgleichungen
Lineare Gleichungssysteme
Ungleichungen
Funktionen
Folgen und Reihen
Grenzwerte und Stetigkeit

Lösen linearer Gleichungssysteme mit zwei Gleichungen und Unbekannten

Cramersche Regel

Sei also

$$\begin{aligned}(1) \quad a_{11}\,x_1 + a_{12}\,x_2 &= b_1\\ (2) \quad a_{21}\,x_1 + a_{22}\,x_2 &= b_2,\end{aligned}$$

ein lineares Gleichungssystem (kurz „LGS"), wobei nicht alle Koeffizienten Null sein sollen.
Geometrisch sind dies die Gleichungen zweier Geraden im $\mathbb{R}^2$. Wir suchen nun Wertepaare (x_1, x_2), die beide Gleichungen erfüllen, d. h. geometrisch gemeinsame Punkte der beiden Geraden.

Vorkurs Mathematik

Grundlagen

Gleichungen

Quadratische Gleichungen

Polynomgleichungen

Potenzgleichungen

Wurzelgleichungen

Gleichungen mit Beträgen

Exponentialgleichungen

Lineare Gleichungssysteme

Ungleichungen

Funktionen

Folgen und Reihen

Grenzwerte und Stetigkeit

Beispiel: Zwei Gleichungen und zwei Unbekannten

Beispiel 2.24

$$\begin{aligned} \text{(i)} \quad 2\,x_1 + 2\,x_2 &= 4 \\ \text{(ii)} \quad 1\,x_1 - 1\,x_2 &= 0 \end{aligned}$$

Also: $a_{11} = 2$, $a_{12} = 2$, $a_{21} = 1$, $a_{22} = -1$, $b_1 = 4$, $b_2 = 0$. Wir wenden *elementare Zeilenumformungen* an, um eine Gleichung zu erhalten, die nur noch x_2 oder nur noch x_1 enthält.

Vorkurs Mathematik

Grundlagen

Gleichungen

Quadratische Gleichungen

Polynomgleichungen

Potenzgleichungen

Wurzelgleichungen

Gleichungen mit Beträgen

Exponentialgleichungen

Lineare Gleichungssysteme

Ungleichungen

Funktionen

Folgen und Reihen

Grenzwerte und Stetigkeit

Beispiel 2.24 (fort.)

$$\begin{array}{l|rcrcr} (i) & 2\,x_1 & + & 2\,x_2 & = & 4 \\ (ii) & 1\,x_1 & + & (-1)\,x_2 & = & 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{l|rcrcr} (i) & 2\,x_1 & + & 2\,x_2 & = & 4 \\ (ii) & 1\,x_1 & + & (-1)\,x_2 & = & 0 \end{array}$$

Beispiel 2.24 (fort.)

$$\begin{array}{l|rcrcr} (i)\cdot(-1) & 2\,x_1 & + & 2\,x_2 & = & 4 \\ (ii)\cdot(-2) & 1\,x_1 & + & (-1)\,x_2 & = & 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{l|rcrcr} (i) & 2\,x_1 & + & 2\,x_2 & = & 4 \\ (ii) & 1\,x_1 & + & (-1)\,x_2 & = & 0 \end{array}$$

Beispiel 2.24 (fort.)

$$\begin{array}{l|rcrcr} (i)\cdot(-1) & (-1)\cdot 2\,x_1 & + & (-1)\cdot 2\,x_2 & = & (-1)\cdot 4 \\ (ii)\cdot(-2) & 1\,x_1 & + & (-1)\,x_2 & = & 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{l|rcrcr} (i) & 2\,x_1 & + & 2\,x_2 & = & 4 \\ (ii) & 1\,x_1 & + & (-1)\,x_2 & = & 0 \end{array}$$

Beispiel 2.24 (fort.)

$$\begin{array}{l|rcrcl} (i)\cdot(-1) & (-1)\cdot 2\,x_1 & + & (-1)\cdot 2\,x_2 & = & (-1)\cdot 4 \\ (ii)\cdot(-2) & (-2)\cdot 1\,x_1 & + & (-2)\cdot(-1)\,x_2 & = & (-2)\cdot 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{l|rcrcr} (i) & 2\,x_1 & + & 2\,x_2 & = & 4 \\ (ii) & 1\,x_1 & + & (-1)\,x_2 & = & 0 \end{array}$$

Beispiel 2.24 (fort.)

$$\begin{array}{l|rcrcl}
(i)\cdot(-1) & (-1)\cdot 2\,x_1 & + & (-1)\cdot 2\,x_2 & = & (-1)\cdot 4 \\
(ii)\cdot(-2) & (-2)\cdot 1\,x_1 & + & (-2)\cdot(-1)\,x_2 & = & (-2)\cdot 0 \\
\hline
(I) & & & ((-1)\cdot 2 - 1\cdot 2)x_1 & = & (-1)\cdot 4 - 2\cdot 0
\end{array}$$

Damit erhalten wir $-4x_1 = -4$, also $x_1 = 1$. Einsetzen in (ii) liefert $x_2 = x_1 = 1$ und damit $\mathbb{L} = \{(1,1)\}$.

$$\begin{array}{l|rcrcr}
(i) & 2\,x_1 & + & 2\,x_2 & = & 4 \\
(ii) & 1\,x_1 & + & (-1)\,x_2 & = & 0
\end{array}$$

Beispiel 2.24 (fort.)

$$
\begin{array}{l|rcrcl}
(i)\cdot(-1) & (-1)\cdot 2\,x_1 & + & (-1)\cdot 2\,x_2 & = & (-1)\cdot 4 \\
(ii)\cdot(-2) & (-2)\cdot 1\,x_1 & + & (-2)\cdot(-1)\,x_2 & = & (-2)\cdot 0 \\
\hline
(I) & & & ((-1)\cdot 2 - 1\cdot 2)x_1 & = & (-1)\cdot 4 - 2\cdot 0
\end{array}
$$

Damit erhalten wir $-4x_1 = -4$, also $x_1 = 1$. Einsetzen in (ii) liefert $x_2 = x_1 = 1$ und damit $\mathbb{L} = \{(1,1)\}$.
Analog kann man rechnen:

$$
\begin{array}{l|rcrcr}
(i)\cdot(-1) & 2\,x_1 & + & 2\,x_2 & = & 4 \\
(ii)\cdot 2 & 1\,x_1 & + & (-1)\,x_2 & = & 0 \\
 & & & & &
\end{array}
$$

Vorkurs Mathematik

Grundlagen

Gleichungen

Quadratische Gleichungen

Polynomgleichungen

Potenzgleichungen

Wurzelgleichungen

Gleichungen mit Beträgen

Exponentialgleichungen

Lineare Gleichungssysteme

Ungleichungen

Funktionen

Folgen und Reihen

Grenzwerte und Stetigkeit

Beispiel 2.24 (fort.)

$$\begin{array}{l|rcrcl}
(i)\cdot(-1) & (-1)\cdot 2\,x_1 & + & (-1)\cdot 2\,x_2 & = & (-1)\cdot 4 \\
(ii)\cdot(-2) & (-2)\cdot 1\,x_1 & + & (-2)\cdot(-1)\,x_2 & = & (-2)\cdot 0 \\
\hline
(I) & & & ((-1)\cdot 2 - 1\cdot 2)x_1 & = & (-1)\cdot 4 - 2\cdot 0
\end{array}$$

Damit erhalten wir $-4x_1 = -4$, also $x_1 = 1$. Einsetzen in (ii) liefert $x_2 = x_1 = 1$ und damit $\mathbb{L} = \{(1,1)\}$.
Analog kann man rechnen:

$$\begin{array}{l|rcrcl}
(i)\cdot(-1) & {\color{darkred}(-1)}\cdot 2\,x_1 & {\color{darkred}+} & {\color{darkred}(-1)}\cdot 2\,x_2 & = & {\color{darkred}(-1)}\cdot 4 \\
(ii)\cdot 2 & 1\,x_1 & + & (-1)\,x_2 & = & 0
\end{array}$$

Vorkurs Mathematik

Grundlagen

Gleichungen

Quadratische Gleichungen

Polynomgleichungen

Potenzgleichungen

Wurzelgleichungen

Gleichungen mit Beträgen

Exponentialgleichungen

Lineare Gleichungssysteme

Ungleichungen

Funktionen

Folgen und Reihen

Grenzwerte und Stetigkeit

Beispiel 2.24 (fort.)

$$\begin{array}{l|rcl} (i)\cdot(-1) & (-1)\cdot 2\,x_1 + (-1)\cdot 2\,x_2 & = & (-1)\cdot 4 \\ (ii)\cdot(-2) & (-2)\cdot 1\,x_1 + (-2)\cdot(-1)\,x_2 & = & (-2)\cdot 0 \\ \hline (I) & ((-1)\cdot 2 - 1\cdot 2)x_1 & = & (-1)\cdot 4 - 2\cdot 0 \end{array}$$

Damit erhalten wir $-4x_1 = -4$, also $x_1 = 1$. Einsetzen in (ii) liefert $x_2 = x_1 = 1$ und damit $\mathbb{L} = \{(1,1)\}$.
Analog kann man rechnen:

$$\begin{array}{l|rcl} (i)\cdot(-1) & (-1)\cdot 2\,x_1 + (-1)\cdot 2\,x_2 & = & (-1)\cdot 4 \\ (ii)\cdot 2 & 2\cdot 1\,x_1 + 2\cdot(-1)\,x_2 & = & 2\cdot 0 \end{array}$$

Beispiel 2.24 (fort.)

$$\begin{array}{l|rcl}
(i)\cdot(-1) & (-1)\cdot 2\,x_1 + \quad (-1)\cdot 2\,x_2 &=& (-1)\cdot 4 \\
(ii)\cdot(-2) & (-2)\cdot 1\,x_1 + (-2)\cdot(-1)\,x_2 &=& (-2)\cdot 0 \\
\hline
(I) & ((-1)\cdot 2 - 1\cdot 2)x_1 &=& (-1)\cdot 4 - 2\cdot 0
\end{array}$$

Damit erhalten wir $-4x_1 = -4$, also $x_1 = 1$. Einsetzen in (ii) liefert $x_2 = x_1 = 1$ und damit $\mathbb{L} = \{(1,1)\}$.
Analog kann man rechnen:

$$\begin{array}{l|rcl}
(i)\cdot(-1) & (-1)\cdot 2\,x_1 + (-1)\cdot 2\,x_2 &=& (-1)\cdot 4 \\
(ii)\cdot 2 & 2\cdot 1\,x_1 + 2\cdot(-1)\,x_2 &=& 2\cdot 0 \\
\hline
(II) & (2\cdot(-1) - 2\cdot 1)\,x_2 &=& 2\cdot 0 - 1\cdot 4
\end{array}$$

Damit erhalten wir $-4x_2 = -4$, also $x_2 = 1$. Einsetzen in (ii) liefert $x_1 = x_2 = 1$ und damit $\mathbb{L} = \{(1,1)\}$.

Allgemein gibt es drei verschiedene Möglichkeiten:

1. Es gibt eine eindeutig bestimmte Lösung.
   (Geometrisch: Die Geraden schneiden sich in einem Punkt.)

Vorkurs Mathematik

Grundlagen

Gleichungen

Quadratische Gleichungen

Polynomgleichungen

Potenzgleichungen

Wurzelgleichungen

Gleichungen mit Beträgen

Exponentialgleichungen

Lineare Gleichungssysteme

Ungleichungen

Funktionen

Folgen und Reihen

Grenzwerte und Stetigkeit

Allgemein gibt es drei verschiedene Möglichkeiten:

1. Es gibt eine eindeutig bestimmte Lösung.
   (Geometrisch: Die Geraden schneiden sich in einem Punkt.)
2. Es gibt unendlich viele Lösungen.
   (Geometrisch: Die Geraden sind gleich.)

Vorkurs Mathematik

Grundlagen

Gleichungen

Quadratische Gleichungen
Polynomgleichungen
Potenzgleichungen
Wurzelgleichungen
Gleichungen mit Beträgen
Exponentialgleichungen
Lineare Gleichungssysteme

Ungleichungen

Funktionen

Folgen und Reihen

Grenzwerte und Stetigkeit

Allgemein gibt es drei verschiedene Möglichkeiten:

1. Es gibt eine eindeutig bestimmte Lösung.
   (Geometrisch: Die Geraden schneiden sich in einem Punkt.)
2. Es gibt unendlich viele Lösungen.
   (Geometrisch: Die Geraden sind gleich.)
3. Es gibt keine Lösung.
   (Geometrisch: Die Geraden sind parallel aber nicht gleich.)

Wir setzen zunächst voraus, dass alle Koeffizienten ungleich Null sind.

$$\begin{array}{ll|rcrcl} (1) & & a_{11}\,x_1 & + & a_{12}\,x_2 & = & b_1 \\ (2) & & a_{21}\,x_1 & + & a_{22}\,x_2 & = & b_2 \end{array}$$

$$\begin{array}{ll|rcrcl} (1) & & a_{11}\,x_1 & + & a_{12}\,x_2 & = & b_1 \\ (2) & & a_{21}\,x_1 & + & a_{22}\,x_2 & = & b_2 \end{array}$$

Wir setzen zunächst voraus, dass alle Koeffizienten ungleich Null sind.

$$\begin{array}{l|rcrcl} (1)\cdot a_{22} & a_{11}\,x_1 & + & a_{12}\,x_2 & = & b_1 \\ (2)\cdot(-a_{12}) & a_{21}\,x_1 & + & a_{22}\,x_2 & = & b_2 \end{array}$$

$$\begin{array}{l|rcrcl} (1) & a_{11}\,x_1 & + & a_{12}\,x_2 & = & b_1 \\ (2) & a_{21}\,x_1 & + & a_{22}\,x_2 & = & b_2 \end{array}$$

Wir setzen zunächst voraus, dass alle Koeffizienten ungleich Null sind.

$$\begin{array}{l|rcrcr} (1)\cdot a_{22} & a_{22}\, a_{11}\, x_1 & + & a_{22}\, a_{12}\, x_2 & = & a_{22}\, b_1 \\ (2)\cdot(-a_{12}) & a_{21}\, x_1 & + & a_{22}\, x_2 & = & b_2 \end{array}$$

$$\begin{array}{l|rcrcr} (1) & a_{11}\, x_1 & + & a_{12}\, x_2 & = & b_1 \\ (2) & a_{21}\, x_1 & + & a_{22}\, x_2 & = & b_2 \end{array}$$

Wir setzen zunächst voraus, dass alle Koeffizienten ungleich Null sind.

$$\begin{array}{l|rcrcr} (1)\cdot a_{22} & a_{22}\,a_{11}\,x_1 & + & a_{22}\,a_{12}\,x_2 & = & a_{22}\,b_1 \\ (2)\cdot(-a_{12}) & -a_{12}\,a_{21}\,x_1 & - & a_{12}\,a_{22}\,x_2 & = & -a_{12}\,b_2 \end{array}$$

$$\begin{array}{l|rcrcr} (1) & a_{11}\,x_1 & + & a_{12}\,x_2 & = & b_1 \\ (2) & a_{21}\,x_1 & + & a_{22}\,x_2 & = & b_2 \end{array}$$

Wir setzen zunächst voraus, dass alle Koeffizienten ungleich Null sind.

$$
\begin{array}{l|rcrcr}
(1)\cdot a_{22} & a_{22}\,a_{11}\,x_1 & + & a_{22}\,a_{12}\,x_2 & = & a_{22}\,b_1 \\
(2)\cdot(-a_{12}) & -a_{12}\,a_{21}\,x_1 & - & a_{12}\,a_{22}\,x_2 & = & -a_{12}\,b_2 \\
\hline
(I) & \multicolumn{5}{r}{(a_{11}\,a_{22} - a_{12}\,a_{21})\,x_1 = a_{22}\,b_1 - a_{12}\,b_2}
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{l|rcrcr}
(1) & a_{11}\,x_1 & + & a_{12}\,x_2 & = & b_1 \\
(2) & a_{21}\,x_1 & + & a_{22}\,x_2 & = & b_2
\end{array}
$$

Grundlagen
Gleichungen
Quadratische Gleichungen
Polynomgleichungen
Potenzgleichungen
Wurzelgleichungen
Gleichungen mit Beträgen
Exponentialgleichungen
Lineare Gleichungssysteme
Ungleichungen
Funktionen
Folgen und Reihen
Grenzwerte und Stetigkeit

Wir setzen zunächst voraus, dass alle Koeffizienten ungleich Null sind.

$$
\begin{array}{l|rcrcr}
(1)\cdot a_{22} & a_{22}\,a_{11}\,x_1 & + & a_{22}\,a_{12}\,x_2 & = & a_{22}\,b_1 \\
(2)\cdot(-a_{12}) & -a_{12}\,a_{21}\,x_1 & - & a_{12}\,a_{22}\,x_2 & = & -a_{12}\,b_2 \\
\hline
(I) & \multicolumn{5}{r}{(a_{11}\,a_{22} - a_{12}\,a_{21})\,x_1 = a_{22}\,b_1 - a_{12}\,b_2}
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{l|rcrcr}
(1)\cdot(-a_{21}) & a_{11}\,x_1 & + & a_{12}\,x_2 & = & b_1 \\
(2)\cdot a_{11} & a_{21}\,x_1 & + & a_{22}\,x_2 & = & b_2
\end{array}
$$

Wir setzen zunächst voraus, dass alle Koeffizienten ungleich Null sind.

$$
\begin{array}{l|rcrcl}
(1)\cdot a_{22} & a_{22}\,a_{11}\,x_1 & + & a_{22}\,a_{12}\,x_2 & = & a_{22}\,b_1 \\
(2)\cdot(-a_{12}) & -a_{12}\,a_{21}\,x_1 & - & a_{12}\,a_{22}\,x_2 & = & -a_{12}\,b_2 \\
\hline
(I) & \multicolumn{5}{r}{(a_{11}\,a_{22}-a_{12}\,a_{21})\,x_1 = a_{22}\,b_1 - a_{12}\,b_2}
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{l|rcrcl}
(1)\cdot(-a_{21}) & -a_{21}\,a_{11}\,x_1 & - & a_{21}\,a_{12}\,x_2 & = & -a_{21}\,b_1 \\
(2)\cdot a_{11} & a_{21}\,x_1 & + & a_{22}\,x_2 & = & b_2
\end{array}
$$

Wir setzen zunächst voraus, dass alle Koeffizienten ungleich Null sind.

$$\begin{array}{l|rcrcr}
(1)\cdot a_{22} & a_{22}\,a_{11}\,x_1 & + & a_{22}\,a_{12}\,x_2 & = & a_{22}\,b_1 \\
(2)\cdot(-a_{12}) & -a_{12}\,a_{21}\,x_1 & - & a_{12}\,a_{22}\,x_2 & = & -a_{12}\,b_2 \\
\hline
(I) & \multicolumn{5}{r}{(a_{11}\,a_{22} - a_{12}\,a_{21})\,x_1 = a_{22}\,b_1 - a_{12}\,b_2}
\end{array}$$

$$\begin{array}{l|rcrcr}
(1)\cdot(-a_{21}) & -a_{21}\,a_{11}\,x_1 & - & a_{21}\,a_{12}\,x_2 & = & -a_{21}\,b_1 \\
(2)\cdot a_{11} & a_{11}\,a_{21}\,x_1 & + & a_{11}\,a_{22}\,x_2 & = & a_{11}\,b_2
\end{array}$$

Vorkurs Mathematik
Grundlagen
Gleichungen
Quadratische Gleichungen
Polynomgleichungen
Potenzgleichungen
Wurzelgleichungen
Gleichungen mit Beträgen
Exponentialgleichungen
Lineare Gleichungssysteme
Ungleichungen
Funktionen
Folgen und Reihen
Grenzwerte und Stetigkeit

Wir setzen zunächst voraus, dass alle Koeffizienten ungleich Null sind.

$$
\begin{array}{l|rcl}
(1)\cdot a_{22} & a_{22}\,a_{11}\,x_1 + a_{22}\,a_{12}\,x_2 & = & a_{22}\,b_1 \\
(2)\cdot(-a_{12}) & -a_{12}\,a_{21}\,x_1 - a_{12}\,a_{22}\,x_2 & = & -a_{12}\,b_2 \\
\hline
(I) & (a_{11}\,a_{22} - a_{12}\,a_{21})\,x_1 & = & a_{22}\,b_1 - a_{12}\,b_2
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{l|rcl}
(1)\cdot(-a_{21}) & -a_{21}\,a_{11}\,x_1 - a_{21}\,a_{12}\,x_2 & = & -a_{21}\,b_1 \\
(2)\cdot a_{11} & a_{11}\,a_{21}\,x_1 + a_{11}\,a_{22}\,x_2 & = & a_{11}\,b_2 \\
\hline
(II) & (a_{11}\,a_{22} - a_{12}\,a_{21})\,x_2 & = & a_{11}\,b_2 - a_{21}\,b_1
\end{array}
$$

1. (I) und (II) sind Bestimmungsgleichungen für x_1 und x_2. Man kann nachrechnen, dass (I) und (II) auch gültig sind, wenn Koeffizienten Null sind.

1. (I) und (II) sind Bestimmungsgleichungen für x_1 und x_2. Man kann nachrechnen, dass (I) und (II) auch gültig sind, wenn Koeffizienten Null sind.
2. Der Wert $D = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$ bestimmt die Lösungsmöglichkeit des Gleichungssystems. Man bezeichnet ihn daher als Determinante.

1. (I) und (II) sind Bestimmungsgleichungen für x_1 und x_2. Man kann nachrechnen, dass (I) und (II) auch gültig sind, wenn Koeffizienten Null sind.
2. Der Wert $D = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$ bestimmt die Lösungsmöglichkeit des Gleichungssystems. Man bezeichnet ihn daher als Determinante.
   2.1 Ist $D \neq 0$, so hat das lineare Gleichungssystem die eindeutige Lösung

$$x_1 = \frac{a_{22}\, b_1 - a_{12}\, b_2}{a_{11}\, a_{22} - a_{12}\, a_{21}}\,, \quad x_2 = \frac{a_{11}\, b_2 - a_{21}\, b_1}{a_{11}\, a_{22} - a_{12}\, a_{21}}$$

Vorkurs Mathematik
Grundlagen
Gleichungen
Quadratische Gleichungen
Polynomgleichungen
Potenzgleichungen
Wurzelgleichungen
Gleichungen mit Beträgen
Exponentialgleichungen
Lineare Gleichungssysteme
Ungleichungen
Funktionen
Folgen und Reihen
Grenzwerte und Stetigkeit

1. (I) und (II) sind Bestimmungsgleichungen für x_1 und x_2. Man kann nachrechnen, dass (I) und (II) auch gültig sind, wenn Koeffizienten Null sind.
2. Der Wert $D = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$ bestimmt die Lösungsmöglichkeit des Gleichungssystems. Man bezeichnet ihn daher als Determinante.
   2.1 Ist $D \neq 0$, so hat das lineare Gleichungssystem die eindeutige Lösung

$$x_1 = \frac{a_{22}\, b_1 - a_{12}\, b_2}{a_{11}\, a_{22} - a_{12}\, a_{21}}\,, \quad x_2 = \frac{a_{11}\, b_2 - a_{21}\, b_1}{a_{11}\, a_{22} - a_{12}\, a_{21}}$$

   2.2 Ist $D = 0$ und $a_{22}\, b_1 - a_{12}\, b_2 = 0$ und $a_{11}\, b_2 - a_{21}\, b_1 = 0$, so hat das lineare Gleichungssystem unendlich viele Lösungen.

1. (I) und (II) sind Bestimmungsgleichungen für x_1 und x_2. Man kann nachrechnen, dass (I) und (II) auch gültig sind, wenn Koeffizienten Null sind.
2. Der Wert $D = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$ bestimmt die Lösungsmöglichkeit des Gleichungssystems. Man bezeichnet ihn daher als Determinante.
   2.1 Ist $D \neq 0$, so hat das lineare Gleichungssystem die eindeutige Lösung

$$x_1 = \frac{a_{22}\,b_1 - a_{12}\,b_2}{a_{11}\,a_{22} - a_{12}\,a_{21}}\,, \quad x_2 = \frac{a_{11}\,b_2 - a_{21}\,b_1}{a_{11}\,a_{22} - a_{12}\,a_{21}}$$

   2.2 Ist $D = 0$ und $a_{22}\,b_1 - a_{12}\,b_2 = 0$ und $a_{11}\,b_2 - a_{21}\,b_1 = 0$, so hat das lineare Gleichungssystem unendlich viele Lösungen.
   2.3 Ist $D = 0$ und $(a_{22}\,b_1 - a_{12}\,b_2 \neq 0$ oder $a_{11}\,b_2 - a_{21}\,b_1 \neq 0)$, so hat das lineare Gleichungssystem keine Lösung.

Grundlagen
Gleichungen
Quadratische Gleichungen
Polynomgleichungen
Potenzgleichungen
Wurzelgleichungen
Gleichungen mit Beträgen
Exponentialgleichungen
Lineare Gleichungssysteme
Ungleichungen
Funktionen
Folgen und Reihen
Grenzwerte und Stetigkeit

Bezeichnung 2.25

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}\,a_{22} - a_{12}\,a_{21}$$

heißt Determinante*.*
Ebenso:

$$D_{x_1} = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix} = b_1\,a_{22} - b_2\,a_{12}$$

und

$$D_{x_2} = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix} = a_{11}\,b_2 - a_{21}\,b_1$$

D_{x_1} und D_{x_2} erhält man aus D, indem man die 1. bzw. 2. Spalte durch die rechte Seite des Gleichungssystems (1) und (2) ersetzt. Man nennt sie daher auch Streichungsdeterminanten.

Damit gilt:

$$\begin{aligned} (I) \quad & D \cdot x_1 = D_{x_1} \\ (II) \quad & D \cdot x_2 = D_{x_2} \end{aligned}$$

und

1. $D \neq 0$. Dann ist $x_1 = \frac{D_{x_1}}{D}$, $x_2 = \frac{D_{x_2}}{D}$, also

$$\mathbb{L} = \left\{ \left(\frac{D_{x_1}}{D}, \frac{D_{x_2}}{D} \right) \right\}.$$

Damit gilt:

$$\begin{aligned} (I) \quad & D \cdot x_1 = D_{x_1} \\ (II) \quad & D \cdot x_2 = D_{x_2} \end{aligned}$$

und

1. $D \neq 0$. Dann ist $x_1 = \frac{D_{x_1}}{D}$, $x_2 = \frac{D_{x_2}}{D}$, also

$$\mathbb{L} = \left\{ \left(\frac{D_{x_1}}{D}, \frac{D_{x_2}}{D} \right) \right\}.$$

2. $D = 0$ und $D_{x_1} = 0$ und $D_{x_2} = 0$. Dann wird aus (I) und (II) $0 = 0$, also

$$\mathbb{L} = \left\{ (x_1, x_2) : a_{11}\, x_1 + a_{12}\, x_2 = b_1 \right\}.$$

Vorkurs Mathematik

Grundlagen

Gleichungen

Quadratische Gleichungen

Polynomgleichungen

Potenzgleichungen

Wurzelgleichungen

Gleichungen mit Beträgen

Exponentialgleichungen

Lineare Gleichungssysteme

Ungleichungen

Funktionen

Folgen und Reihen

Grenzwerte und Stetigkeit

Damit gilt:

$$\begin{aligned} (I) \quad & D \cdot x_1 = D_{x_1} \\ (II) \quad & D \cdot x_2 = D_{x_2} \end{aligned}$$

und

1. $D \neq 0$. Dann ist $x_1 = \frac{D_{x_1}}{D}$, $x_2 = \frac{D_{x_2}}{D}$, also
$$\mathbb{L} = \left\{ \left(\frac{D_{x_1}}{D}, \frac{D_{x_2}}{D} \right) \right\}.$$
2. $D = 0$ und $D_{x_1} = 0$ und $D_{x_2} = 0$. Dann wird aus (I) und (II) $0 = 0$, also
$$\mathbb{L} = \left\{ (x_1, x_2) : a_{11}\, x_1 + a_{12}\, x_2 = b_1 \right\}.$$
3. $D = 0$ und $(D_{x_1} \neq 0$ oder $D_{x_2} \neq 0)$. Dann ist (I) oder (II) nicht erfüllbar, also:
$$\mathbb{L} = \{ \, \}.$$

Vorkurs Mathematik

Grundlagen

Gleichungen

Quadratische Gleichungen

Polynomgleichungen

Potenzgleichungen

Wurzelgleichungen

Gleichungen mit Beträgen

Exponentialgleichungen

Lineare Gleichungssysteme

Ungleichungen

Funktionen

Folgen und Reihen

Grenzwerte und Stetigkeit

Beispiel 2.26

$$\begin{aligned} 2\,x_1 - 3\,x_2 &= 3 \\ \frac{1}{3}\,x_1 + x_2 &= 2 \end{aligned}$$

Beispiel 2.26

$$2\,x_1 - 3\,x_2 = 3$$
$$\frac{1}{3}\,x_1 + x_2 = 2$$

Dazu berechnen wir die zugehörigen Determinanten.

$$D = \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ \frac{1}{3} & 1 \end{vmatrix} = 3 \qquad D_{x_1} = \begin{vmatrix} 3 & -3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 9 \qquad D_{x_2} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ \frac{1}{3} & 2 \end{vmatrix} = 3$$

Da $D \neq 0$ ist, ist das Gleichungssystem eindeutig lösbar und es gilt

$$x_1 = \frac{D_{x_1}}{D} = 3\,, \quad x_2 = \frac{D_{x_2}}{D} = 1\,.$$

Die Lösungsmenge ist somit $\mathbb{L} = \{(3,1)\}$.

Gaußsches Eliminationsverfahren

Besitzen zwei lineare Gleichungssysteme die selbe Lösungsmenge, so heißen die beiden linearen Gleichungssysteme *äquivalent*.

Grundlagen
Gleichungen
Quadratische Gleichungen
Polynomgleichungen
Potenzgleichungen
Wurzelgleichungen
Gleichungen mit Beträgen
Exponentialgleichungen
Lineare Gleichungssysteme
Ungleichungen
Funktionen
Folgen und Reihen
Grenzwerte und Stetigkeit

Gaußsches Eliminationsverfahren

Besitzen zwei lineare Gleichungssysteme die selbe Lösungsmenge, so heißen die beiden linearen Gleichungssysteme *äquivalent*.
Die folgenden drei Umformungen wandeln ein LGS in ein äquivalentes System um, d. h. die Lösungsmenge wird dadurch nicht verändert:

1. Vertauschen zweier Gleichungen (Zeilen)

Diese drei Umformungen bezeichnet man als *elementare Zeilenumformungen*.

Gaußsches Eliminationsverfahren

Besitzen zwei lineare Gleichungssysteme die selbe Lösungsmenge, so heißen die beiden linearen Gleichungssysteme *äquivalent*.
Die folgenden drei Umformungen wandeln ein LGS in ein äquivalentes System um, d. h. die Lösungsmenge wird dadurch nicht verändert:

1. Vertauschen zweier Gleichungen (Zeilen)
2. Multiplikation einer Gleichung (Zeile) mit einer reellen Zahl $\alpha \neq 0$

Diese drei Umformungen bezeichnet man als *elementare Zeilenumformungen*.

Gaußsches Eliminationsverfahren

Besitzen zwei lineare Gleichungssysteme die selbe Lösungsmenge, so heißen die beiden linearen Gleichungssysteme *äquivalent*.
Die folgenden drei Umformungen wandeln ein LGS in ein äquivalentes System um, d. h. die Lösungsmenge wird dadurch nicht verändert:

1. Vertauschen zweier Gleichungen (Zeilen)
2. Multiplikation einer Gleichung (Zeile) mit einer reellen Zahl $\alpha \neq 0$
3. Addition/Subtraktion des Vielfachen einer Gleichung (Zeile) zu/von einer anderen Gleichung (Zeile)

Diese drei Umformungen bezeichnet man als *elementare Zeilenumformungen*.

Wir betrachten nun lineare Gleichungssysteme in allgemeiner Form mit m Gleichungen und n Unbekannten:

$$\begin{array}{ccccccccccc}
a_{11}\,x_1 & + & a_{12}\,x_2 & + \ldots + & a_{1k}\,x_k & + \ldots + & a_{1n}\,x_n & = & b_1 \\
a_{21}\,x_1 & + & a_{22}\,x_2 & + \ldots + & a_{2k}\,x_k & + \ldots + & a_{2n}\,x_n & = & b_2 \\
\vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
a_{i1}\,x_1 & + & a_{i2}\,x_2 & + \ldots + & a_{ik}\,x_k & + \ldots + & a_{in}\,x_n & = & b_i \\
\vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
a_{m1}\,x_1 & + & a_{m2}\,x_2 & + \ldots + & a_{mk}\,x_k & + \ldots + & a_{mn}\,x_n & = & b_m
\end{array}$$

Häufig schreibt man statt der m Gleichungen untereinander ein Tableau mit den Koeffizienten:

$$\left(\begin{array}{cccccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1k} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2k} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ik} & \dots & a_{in} & b_i \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mk} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array}\right)$$

Mit Hilfe elementarer Zeilenumformungen lässt sich jedes Gleichungssystem auf sogenannte *Zeilenstufenform* bringen.

$$\left(\begin{array}{cccccccccc|c}
1 & * & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & * & \tilde{b}_1 \\
0 & 1 & * & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & * & \tilde{b}_2 \\
0 & \cdots & 0 & 1 & * & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & * & \tilde{b}_3 \\
0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 1 & * & \cdots & \cdots & * & \tilde{b}_4 \\
0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 1 & * & \cdots & * & \tilde{b}_5 \\
\vdots & & & & & & \ddots & \ddots & & \vdots & \vdots \\
0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 1 & * \cdots & * & \tilde{b}_r \\
\hline
0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \tilde{b}_{r+1} \\
\vdots & & & & & & & \vdots & & \vdots & \vdots \\
0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \tilde{b}_m
\end{array}\right)$$

Die Lösung des linearen Gleichungssystems erhält man aus der Zeilenstufenform durch *Rückwärtseinsetzen*.

- Zeile $r+1$ bis m: Gleichungen der Form $0 = \tilde{b}_i$ sind nur lösbar, falls $\tilde{b}_i = 0$ ist. Damit ist das gesamte Gleichungssystem nur lösbar, wenn $\tilde{b}_{r+1} = \tilde{b}_{r+2} = \ldots = \tilde{b}_m = 0$ ist, andernfalls ist $\mathbb{L} = \{\,\}$.

Die Lösung des linearen Gleichungssystems erhält man aus der Zeilenstufenform durch *Rückwärtseinsetzen*.

- Zeile $r+1$ bis m: Gleichungen der Form $0 = \tilde{b}_i$ sind nur lösbar, falls $\tilde{b}_i = 0$ ist. Damit ist das gesamte Gleichungssystem nur lösbar, wenn $\tilde{b}_{r+1} = \tilde{b}_{r+2} = \ldots = \tilde{b}_m = 0$ ist, andernfalls ist $\mathbb{L} = \{\,\}$.
- Wenn $\tilde{b}_{r+1} = \tilde{b}_{r+2} = \ldots = \tilde{b}_m = 0$ ist, so entsprechen die Zeilen $r+1$ bis m keiner Information und können entfernt werden.

Die Lösung des linearen Gleichungssystems erhält man aus der Zeilenstufenform durch *Rückwärtseinsetzen*.

- Zeile $r+1$ bis m: Gleichungen der Form $0 = \tilde{b}_i$ sind nur lösbar, falls $\tilde{b}_i = 0$ ist. Damit ist das gesamte Gleichungssystem nur lösbar, wenn $\tilde{b}_{r+1} = \tilde{b}_{r+2} = \ldots = \tilde{b}_m = 0$ ist, andernfalls ist $\mathbb{L} = \{\,\}$.
- Wenn $\tilde{b}_{r+1} = \tilde{b}_{r+2} = \ldots = \tilde{b}_m = 0$ ist, so entsprechen die Zeilen $r+1$ bis m keiner Information und können entfernt werden.
- Steht in einer Spalte keine „Treppenstufe“, so kann man die entsprechende Variable frei wählen. Man ersetzt sie in der Lösung durch einen freien Parameter, z. B. $t \in \mathbb{R}$.
  Ein Gleichungssystem, dessen Lösung freie Parameter enthält, nennt man *unterbestimmt*.

Beispiel 2.27

$$
\begin{aligned}
x_1 + 3x_2 - x_3 &= 4 \\
3x_1 + 4x_2 \phantom{{}+x_3} &= 11 \\
2x_1 + x_2 + x_3 &= 7 \\
2x_1 - 4x_2 + 4x_3 &= 6
\end{aligned}
$$

Grundlagen
Gleichungen
Quadratische Gleichungen
Polynomgleichungen
Potenzgleichungen
Wurzelgleichungen
Gleichungen mit Beträgen
Exponentialgleichungen
Lineare Gleichungssysteme
Ungleichungen
Funktionen
Folgen und Reihen
Grenzwerte und Stetigkeit

Beispiel 2.27

$$
\begin{aligned}
x_1 + 3x_2 - x_3 &= 4\\
3x_1 + 4x_2 \phantom{{}+ x_3} &= 11\\
2x_1 + x_2 + x_3 &= 7\\
2x_1 - 4x_2 + 4x_3 &= 6
\end{aligned}
\qquad
\begin{array}{c}
\left(\begin{array}{ccc|c}
1 & 3 & -1 & 4\\
3 & 4 & 0 & 11\\
2 & 1 & 1 & 7\\
2 & -4 & 4 & 6
\end{array}\right)
\end{array}
\begin{array}{lll}
(-3) & (-2) & (-2)\\
+ & & \\
 & + & \\
 & & +
\end{array}
$$

Vorkurs Mathematik

Grundlagen

Gleichungen

Quadratische Gleichungen

Polynomgleichungen

Potenzgleichungen

Wurzelgleichungen

Gleichungen mit Beträgen

Exponentialgleichungen

Lineare Gleichungssysteme

Ungleichungen

Funktionen

Folgen und Reihen

Grenzwerte und Stetigkeit

Beispiel 2.27

$$
\begin{array}{rcrcrcr}
x_1 & + & 3x_2 & - & x_3 & = & 4 \\
3x_1 & + & 4x_2 & & & = & 11 \\
2x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & 7 \\
2x_1 & - & 4x_2 & + & 4x_3 & = & 6
\end{array}
\qquad
\left(\begin{array}{rrr|r}
1 & 3 & -1 & 4 \\
3 & 4 & 0 & 11 \\
2 & 1 & 1 & 7 \\
2 & -4 & 4 & 6
\end{array}\right)
\begin{array}{lll}
(-3) & (-2) & (-2) \\
+ & & \\
 & + & \\
 & & +
\end{array}
$$

$$
\longrightarrow \quad
\begin{array}{rcrcrcr}
x_1 & + & 3x_2 & - & x_3 & = & 4 \\
 & - & 5x_2 & + & 3x_3 & = & -1 \\
 & - & 5x_2 & + & 3x_3 & = & -1 \\
 & - & 10x_2 & + & 6x_3 & = & -2
\end{array}
\qquad
\left(\begin{array}{rrr|r}
1 & 3 & -1 & 4 \\
0 & -5 & 3 & -1 \\
0 & -5 & 3 & -1 \\
0 & -10 & 6 & -2
\end{array}\right)
\begin{array}{ll}
 & \\
(-1) & (-2) \\
+ & \\
 & +
\end{array}
$$

BERGISCHE UNIVERSITÄT WUPPERTAL

Beispiel 2.27 (fort.)

$$\longrightarrow \quad \begin{aligned} x_1 + 3x_2 - x_3 &= 4 \\ -5x_2 + 3x_3 &= -1 \\ 0 &= 0 \\ 0 &= 0 \end{aligned} \qquad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -1 & 4 \\ 0 & -5 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Beispiel 2.27 (fort.)

$$\longrightarrow \quad \begin{array}{rcrcrcr} x_1 & + & 3x_2 & - & x_3 & = & 4 \\ & - & 5x_2 & + & 3x_3 & = & -1 \\ & & & & 0 & = & 0 \\ & & & & 0 & = & 0 \end{array} \qquad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -1 & 4 \\ 0 & -5 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$\Longrightarrow$ x_3 ist frei wählbar: $x_3 = t \in \mathbb{R}$

Beispiel 2.27 (fort.)

$$\longrightarrow \quad \begin{aligned} x_1 + 3x_2 - x_3 &= 4 \\ -5x_2 + 3x_3 &= -1 \\ 0 &= 0 \\ 0 &= 0 \end{aligned} \qquad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -1 & 4 \\ 0 & -5 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$\Longrightarrow$ x_3 ist frei wählbar: $x_3 = t \in \mathbb{R}$

$$\overset{(II)}{\Longrightarrow} \; -5\,x_2 + 3t = -1 \iff x_2 = \frac{1}{5} + \frac{3}{5}t$$

Beispiel 2.27 (fort.)

$$\longrightarrow \quad \begin{array}{rcrcrcr} x_1 & + & 3x_2 & - & x_3 & = & 4 \\ & - & 5x_2 & + & 3x_3 & = & -1 \\ & & & & 0 & = & 0 \\ & & & & 0 & = & 0 \end{array} \qquad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -1 & 4 \\ 0 & -5 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$\Longrightarrow$ x_3 ist frei wählbar: $x_3 = t \in \mathbb{R}$

$$\overset{(II)}{\Longrightarrow} \; -5\,x_2 + 3t = -1 \iff x_2 = \frac{1}{5} + \frac{3}{5}t$$

$$\overset{(I)}{\Longrightarrow} \; x_1 + 3\left(\frac{1}{5} + \frac{3}{5}t\right) - t = 4 \iff x_1 = \frac{17}{5} - \frac{4}{5}t$$

Grundlagen
Gleichungen
Quadratische Gleichungen
Polynomgleichungen
Potenzgleichungen
Wurzelgleichungen
Gleichungen mit Beträgen
Exponentialgleichungen
Lineare Gleichungssysteme
Ungleichungen
Funktionen
Folgen und Reihen
Grenzwerte und Stetigkeit

Beispiel 2.27 (fort.)

$$\longrightarrow \quad \begin{aligned} x_1 + 3x_2 - x_3 &= 4 \\ -5x_2 + 3x_3 &= -1 \\ 0 &= 0 \\ 0 &= 0 \end{aligned} \qquad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -1 & 4 \\ 0 & -5 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$\Longrightarrow x_3$ ist frei wählbar: $x_3 = t \in \mathbb{R}$

$$\overset{(II)}{\Longrightarrow} -5\,x_2 + 3t = -1 \iff x_2 = \frac{1}{5} + \frac{3}{5}t$$

$$\overset{(I)}{\Longrightarrow} x_1 + 3\left(\frac{1}{5} + \frac{3}{5}t\right) - t = 4 \iff x_1 = \frac{17}{5} - \frac{4}{5}t$$

$$\Longrightarrow \mathbb{L} = \left\{ \left(\frac{17}{5} - \frac{4}{5}t,\ \frac{1}{5} + \frac{3}{5}t,\ t \right),\ t \in \mathbb{R} \right\}$$

Beispiel 2.28

$$
\begin{aligned}
3x + 2y + z &= 4 \\
6x + 5y + 4z &= 11 \\
-3x \phantom{{}+5y} + 3z &= 4
\end{aligned}
$$

Beispiel 2.28

$$
\begin{aligned}
3x + 2y + z &= 4\\
6x + 5y + 4z &= 11\\
-3x + 3z &= 4
\end{aligned}
\qquad
\begin{array}{c}
\left(\begin{array}{ccc|c}
3 & 2 & 1 & 4\\
6 & 5 & 4 & 11\\
-3 & 0 & 3 & 4
\end{array}\right)
\end{array}
\begin{array}{l}
(-2)\\
\leftarrow +\\
\leftarrow +
\end{array}
$$

Grundlagen
Gleichungen
Quadratische Gleichungen
Polynomgleichungen
Potenzgleichungen
Wurzelgleichungen
Gleichungen mit Beträgen
Exponentialgleichungen
Lineare Gleichungssysteme
Ungleichungen
Funktionen
Folgen und Reihen
Grenzwerte und Stetigkeit

Beispiel 2.28

$$\begin{aligned} 3x + 2y + z &= 4 \\ 6x + 5y + 4z &= 11 \\ -3x \phantom{{}+5y} + 3z &= 4 \end{aligned} \qquad \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & 1 & 4 \\ 6 & 5 & 4 & 11 \\ -3 & 0 & 3 & 4 \end{array}\right) \begin{array}{l} (-2) \\ + \\ + \end{array}$$

$$\longrightarrow \quad \begin{aligned} 3x + 2y + z &= 4 \\ y + 2z &= 3 \\ 2y + 4z &= 8 \end{aligned} \qquad \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 4 & 8 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ (-2) \\ + \end{array}$$

Vorkurs Mathematik

Grundlagen

Gleichungen

Quadratische Gleichungen

Polynomgleichungen

Potenzgleichungen

Wurzelgleichungen

Gleichungen mit Beträgen

Exponentialgleichungen

Lineare Gleichungssysteme

Ungleichungen

Funktionen

Folgen und Reihen

Grenzwerte und Stetigkeit

Beispiel 2.28

$$\begin{aligned} 3x + 2y + z &= 4 \\ 6x + 5y + 4z &= 11 \\ -3x \phantom{{}+ 5y} + 3z &= 4 \end{aligned} \qquad \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & 1 & 4 \\ 6 & 5 & 4 & 11 \\ -3 & 0 & 3 & 4 \end{array}\right) \quad \begin{array}{l} (-2) \\ + \\ + \end{array}$$

$$\longrightarrow \quad \begin{aligned} 3x + 2y + z &= 4 \\ y + 2z &= 3 \\ 2y + 4z &= 8 \end{aligned} \qquad \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 4 & 8 \end{array}\right) \quad \begin{array}{l} \\ (-2) \\ + \end{array}$$

$$\longrightarrow \quad \begin{aligned} 3x + 2y + z &= 4 \\ y + 2z &= 3 \\ 0 &= 2 \end{aligned} \qquad \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right)$$

Beispiel 2.28 (fort.)

$$\longrightarrow \quad \begin{aligned} 3x + 2y + z &= 4 \\ y + 2z &= 3 \\ 0 &= 2 \end{aligned} \qquad \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right)$$

Grundlagen
Gleichungen
Quadratische Gleichungen
Polynomgleichungen
Potenzgleichungen
Wurzelgleichungen
Gleichungen mit Beträgen
Exponentialgleichungen
Lineare Gleichungssysteme
Ungleichungen
Funktionen
Folgen und Reihen
Grenzwerte und Stetigkeit

Grundlagen
Gleichungen
Quadratische Gleichungen
Polynomgleichungen
Potenzgleichungen
Wurzelgleichungen
Gleichungen mit Beträgen
Exponentialgleichungen
Lineare Gleichungssysteme
Ungleichungen
Funktionen
Folgen und Reihen
Grenzwerte und Stetigkeit

Beispiel 2.28 (fort.)

$$\longrightarrow \quad \begin{aligned} 3x + 2y + z &= 4 \\ y + 2z &= 3 \\ 0 &= 2 \end{aligned} \qquad \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right)$$

Die dritte Zeile entspricht demnach der Gleichung $0\,x + 0\,y + 0\,z = 2$. Diese Gleichung hat keine Lösung und daher ist das gesamte LGS nicht lösbar,

$$\mathbb{L} = \{\,\}.$$

Beispiel 2.29

$$\begin{aligned} 3x + 2y + z &= 4 \\ 6x + 5y + 4z &= 11 \\ -3x \phantom{{}+ 5y} + 2z &= 4 \end{aligned}$$

Beispiel 2.29

$$\begin{aligned} 3x + 2y + z &= 4 \\ 6x + 5y + 4z &= 11 \\ -3x \phantom{{}+5y} + 2z &= 4 \end{aligned}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & 1 & 4 \\ 6 & 5 & 4 & 11 \\ -3 & 0 & 2 & 4 \end{array}\right) \quad \begin{array}{l} (-2) \\ + \\ + \end{array}$$

Vorkurs Mathematik
Grundlagen
Gleichungen
Quadratische Gleichungen
Polynomgleichungen
Potenzgleichungen
Wurzelgleichungen
Gleichungen mit Beträgen
Exponentialgleichungen
Lineare Gleichungssysteme
Ungleichungen
Funktionen
Folgen und Reihen
Grenzwerte und Stetigkeit

Beispiel 2.29

$$\begin{aligned} 3x + 2y + z &= 4 \\ 6x + 5y + 4z &= 11 \\ -3x \phantom{{}+5y} + 2z &= 4 \end{aligned} \qquad \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & 1 & 4 \\ 6 & 5 & 4 & 11 \\ -3 & 0 & 2 & 4 \end{array}\right) \quad \begin{array}{l} (-2) \\ + \\ + \end{array}$$

$$\longrightarrow \quad \begin{aligned} 3x + 2y + z &= 4 \\ y + 2z &= 3 \\ 2y + 3z &= 8 \end{aligned} \qquad \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 3 & 8 \end{array}\right) \quad \begin{array}{l} \\ (-2) \\ + \end{array}$$

Beispiel 2.29

$$
\begin{aligned}
3x + 2y + z &= 4 \\
6x + 5y + 4z &= 11 \\
-3x \phantom{{}+5y} + 2z &= 4
\end{aligned}
\qquad
\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & 1 & 4 \\ 6 & 5 & 4 & 11 \\ -3 & 0 & 2 & 4 \end{array}\right)
\begin{array}{l} (-2) \\ + \\ + \end{array}
$$

$$
\longrightarrow \quad
\begin{aligned}
3x + 2y + z &= 4 \\
y + 2z &= 3 \\
2y + 3z &= 8
\end{aligned}
\qquad
\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 3 & 8 \end{array}\right)
\begin{array}{l} \\ (-2) \\ + \end{array}
$$

$$
\longrightarrow \quad
\begin{aligned}
3x + 2y + z &= 4 \\
y + 2z &= 3 \\
- z &= 2
\end{aligned}
\qquad
\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{array}\right)
$$

Beispiel 2.29 (fort.)

$$\longrightarrow \quad \begin{aligned} 3x + 2y + z &= 4 \\ y + 2z &= 3 \\ -z &= 2 \end{aligned} \qquad \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{array}\right)$$

Grundlagen
Gleichungen
Quadratische Gleichungen
Polynomgleichungen
Potenzgleichungen
Wurzelgleichungen
Gleichungen mit Beträgen
Exponentialgleichungen
Lineare Gleichungssysteme
Ungleichungen
Funktionen
Folgen und Reihen
Grenzwerte und Stetigkeit

Beispiel 2.29 (fort.)

$$\longrightarrow \quad \begin{aligned} 3x + 2y + z &= 4 \\ y + 2z &= 3 \\ -z &= 2 \end{aligned} \qquad \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{array}\right)$$

$$\overset{(III)}{\Longrightarrow} -z = 2 \iff z = -2$$

$$\overset{(II)}{\Longrightarrow} y + 2 \cdot (-2) = 3 \iff y = 7$$

$$\overset{(I)}{\Longrightarrow} 3x + 2 \cdot 7 + (-2) = 4 \iff x = -\frac{8}{3}$$

$$\Longrightarrow \mathbb{L} = \left\{ \left(-\frac{8}{3},\ 7,\ -2 \right) \right\}$$

LGS mit drei Gleichungen und drei Unbekannten

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + 2x_3 &= 3 \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 &= 4 \\ 2x_1 \phantom{{}+x_2+2x_3} &= 2 \end{aligned}$$

LGS mit drei Gleichungen und drei Unbekannten

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + 2x_3 &= 3 \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 &= 4 \\ 2x_1 \qquad\qquad &= 2 \end{aligned}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right) \quad \begin{array}{l} (-2) \quad (-2) \\ + \\ + \end{array}$$

Grundlagen
Gleichungen
Quadratische Gleichungen
Polynomgleichungen
Potenzgleichungen
Wurzelgleichungen
Gleichungen mit Beträgen
Exponentialgleichungen
Lineare Gleichungssysteme
Ungleichungen
Funktionen
Folgen und Reihen
Grenzwerte und Stetigkeit

LGS mit drei Gleichungen und drei Unbekannten

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + 2x_3 &= 3 \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 &= 4 \\ 2x_1 \phantom{{}+ x_2 + 2x_3} &= 2 \end{aligned} \qquad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right) \begin{array}{l} (-2) \quad (-2) \\ + \\ \quad\quad\; + \end{array}$$

$$\longrightarrow \quad \begin{aligned} x_1 + x_2 + 2x_3 &= 3 \\ -x_2 - 2x_3 &= -2 \\ -2x_2 - 4x_3 &= -4 \end{aligned} \qquad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -2 & -2 \\ 0 & -2 & -4 & -4 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ (-2) \\ + \end{array}$$

LGS mit drei Gleichungen und drei Unbekannten

$$
\begin{aligned}
x_1 + x_2 + 2x_3 &= 3\\
2x_1 + x_2 + 2x_3 &= 4\\
2x_1 \qquad\qquad &= 2
\end{aligned}
\qquad
\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 3\\ 2 & 1 & 2 & 4\\ 2 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right)
\begin{array}{ll} (-2) & (-2)\\ + & \\ & + \end{array}
$$

$$
\longrightarrow\quad
\begin{aligned}
x_1 + \quad x_2 + 2x_3 &= 3\\
-x_2 - 2x_3 &= -2\\
-2x_2 - 4x_3 &= -4
\end{aligned}
\qquad
\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 3\\ 0 & -1 & -2 & -2\\ 0 & -2 & -4 & -4 \end{array}\right)
\begin{array}{l} \\ (-2)\\ + \end{array}
$$

$$
\longrightarrow\quad
\begin{aligned}
x_1 + \quad x_2 + 2x_3 &= 3\\
-x_2 - 2x_3 &= -2\\
0 &= 0
\end{aligned}
\qquad
\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 3\\ 0 & -1 & -2 & -2\\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)
$$

$$\longrightarrow \quad \begin{aligned} x_1 + \quad x_2 + 2x_3 &= 3 \\ -x_2 - 2x_3 &= -2 \\ 0 &= 0 \end{aligned} \qquad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Grundlagen
Gleichungen
Quadratische Gleichungen
Polynomgleichungen
Potenzgleichungen
Wurzelgleichungen
Gleichungen mit Beträgen
Exponentialgleichungen
Lineare Gleichungssysteme
Ungleichungen
Funktionen
Folgen und Reihen
Grenzwerte und Stetigkeit

$$
\begin{array}{rrrrrrrl}
 & x_1 & + & x_2 & + & 2x_3 & = & 3 \\
\longrightarrow & & & -x_2 & - & 2x_3 & = & -2 \\
 & & & & & 0 & = & 0
\end{array}
\qquad
\left(\begin{array}{ccc|c}
1 & 1 & 2 & 3 \\
0 & -1 & -2 & -2 \\
0 & 0 & 0 & 0
\end{array}\right)
$$

$$\Longrightarrow x_3 \text{ ist frei wählbar: } x_3 = t \in \mathbb{R}$$

$$\overset{(II)}{\Longrightarrow} -x_2 - 2t = -2 \iff x_2 = 2 - 2t$$

$$\overset{(I)}{\Longrightarrow} x_1 + (2 - 2t) + 2t = 3 \iff x_1 = 1$$

$$\Longrightarrow \mathbb{L} = \left\{ \left(1,\ 2 - 2t,\ t \right),\ t \in \mathbb{R} \right\}$$