

Vorkurs Mathematik für Studierende der Ingenieurwissenschaften

Dr. Thomas Pawlaschyk
Prof. Dr. Jean Ruppenthal

Bergische Universität Wuppertal
Fakultät 4 - Mathematik und Informatik

Wintersemester 2018/2019

Dr. Thomas Pawlaschyk

Bergische Universität Wuppertal

Fakultät 4 – Mathematik und Informatik

Arbeitsgruppe Komplexe Analysis

E-mail: `pawlaschyk@math.uni-wuppertal.de`

www: <http://www.kana.uni-wuppertal.de/>

Büro: G15.08

Prof. Dr. Jean Ruppenthal

Bergische Universität Wuppertal

Fakultät 4 – Mathematik und Informatik

Arbeitsgruppe Komplexe Analysis

E-mail: `jean.ruppenthal@math.uni-wuppertal.de`

www: <http://www.kana.uni-wuppertal.de/>

Büro: G15.15

Inhaltsübersicht I

1. Grundlagen

Grundlagen der Aussagenlogik
Grundlagen der Mengenlehre
Zahlenmengen und elementare Rechenregeln
Potenzen, Wurzeln, Logarithmen und Beträge
Trigonometrie
Notation, Abkürzungen und co.

2. Gleichungen

Quadratische Gleichungen
Polynomgleichungen
Potenzgleichungen
Wurzelgleichungen
Gleichungen mit Beträgen
Exponentialgleichungen
Lineare Gleichungssysteme

Inhaltsübersicht II

3. Ungleichungen

Lineare Ungleichungen

Quadratische Ungleichungen

Ungleichungen mit Beträgen

Rechenregeln

4. Funktionen in einer Variable

Lineare Funktionen

Quadratische Funktionen

Polynome

Gebrochenrationale Funktionen

Trigonometrische Funktionen

Exponential- und Logarithmusfunktionen

Übersicht

5. Folgen und Reihen

Folgen

Inhaltsübersicht III

Reihen

6. Grenzwerte und Stetigkeit

Grenzwerte von Funktionen

Stetigkeit

Vorkurs
Mathematik

Grundlagen

Gleichungen

Ungleichungen

Funktionen

Folgen und Reihen

Grenzwerte und
Stetigkeit

Seite 6

Grundlagen

Aussagenlogik

Mengenlehre

Zahlenmengen und
Rechenregeln

Potenzen und Logarithmen

Trigonometrie

Notation, Abkürzungen und
co.

Gleichungen

Ungleichungen

Funktionen

Folgen und Reihen

Grenzwerte und
Stetigkeit

1. Grundlagen

Grundlagen der Aussagenlogik

Grundlagen der Mengenlehre

Zahlenmengen und elementare Rechenregeln

Potenzen, Wurzeln, Logarithmen und Beträge

Trigonometrie

Notation, Abkürzungen und co.

Definition 1.1

Unter einer *Aussage* versteht man eine Behauptung, von der eindeutig entschieden werden kann, ob sie *wahr* oder *falsch* ist.

Einer Aussage ordnet man die Wahrheitswerte wahr (w) oder falsch (f) zu.

Grundlagen

Aussagenlogik

Mengenlehre

Zahlenmengen und
Rechenregeln

Potenzen und Logarithmen

Trigonometrie

Notation, Abkürzungen und
co.

Gleichungen

Ungleichungen

Funktionen

Folgen und Reihen

Grenzwerte und Stetigkeit

Definition 1.1

Unter einer *Aussage* versteht man eine Behauptung, von der eindeutig entschieden werden kann, ob sie *wahr* oder *falsch* ist.

Einer Aussage ordnet man die Wahrheitswerte wahr (w) oder falsch (f) zu.

Beispiel 1.2

A 49 ist eine Primzahl. (f)

Grundlagen

Aussagenlogik

Mengenlehre

Zahlenmengen und
Rechenregeln

Potenzen und Logarithmen

Trigonometrie

Notation, Abkürzungen und
co.

Gleichungen

Ungleichungen

Funktionen

Folgen und Reihen

Grenzwerte und Stetigkeit

Definition 1.1

Unter einer *Aussage* versteht man eine Behauptung, von der eindeutig entschieden werden kann, ob sie *wahr* oder *falsch* ist.

Einer Aussage ordnet man die Wahrheitswerte wahr (w) oder falsch (f) zu.

Beispiel 1.2

- A 49 ist eine Primzahl. (f)
- B 49 ist eine Quadratzahl. (w)

Grundlagen

Aussagenlogik

Mengenlehre

Zahlenmengen und
Rechenregeln

Potenzen und Logarithmen

Trigonometrie

Notation, Abkürzungen und
co.

Gleichungen

Ungleichungen

Funktionen

Folgen und Reihen

Grenzwerte und Stetigkeit

Definition 1.1

Unter einer *Aussage* versteht man eine Behauptung, von der eindeutig entschieden werden kann, ob sie *wahr* oder *falsch* ist.

Einer Aussage ordnet man die Wahrheitswerte wahr (w) oder falsch (f) zu.

Beispiel 1.2

- A 49 ist eine Primzahl. (f)
- B 49 ist eine Quadratzahl. (w)
- C Wien ist die Hauptstadt der Schweiz. (f)

Grundlagen

Aussagenlogik

Mengenlehre

Zahlenmengen und
Rechenregeln

Potenzen und Logarithmen

Trigonometrie

Notation, Abkürzungen und
co.

Gleichungen

Ungleichungen

Funktionen

Folgen und Reihen

Grenzwerte und Stetigkeit

Definition 1.1

Unter einer *Aussage* versteht man eine Behauptung, von der eindeutig entschieden werden kann, ob sie *wahr* oder *falsch* ist.

Einer Aussage ordnet man die Wahrheitswerte wahr (w) oder falsch (f) zu.

Beispiel 1.2

- A 49 ist eine Primzahl. (f)
- B 49 ist eine Quadratzahl. (w)
- C Wien ist die Hauptstadt der Schweiz. (f)
- D Der Vorkurs Mathematik ist nützlich.

Grundlagen

Aussagenlogik

Mengenlehre

Zahlenmengen und
Rechenregeln

Potenzen und Logarithmen

Trigonometrie

Notation, Abkürzungen und
co.

Gleichungen

Ungleichungen

Funktionen

Folgen und Reihen

Grenzwerte und
Stetigkeit

Definition 1.1

Unter einer *Aussage* versteht man eine Behauptung, von der eindeutig entschieden werden kann, ob sie *wahr* oder *falsch* ist.

Einer Aussage ordnet man die Wahrheitswerte wahr (w) oder falsch (f) zu.

Beispiel 1.2

- A 49 ist eine Primzahl. (f)
- B 49 ist eine Quadratzahl. (w)
- C Wien ist die Hauptstadt der Schweiz. (f)
- D Der Vorkurs Mathematik ist nützlich.

Keine Aussage, da die Behauptung nicht objektiv als wahr oder falsch klassifiziert werden kann, auch wenn wir hoffen, dass viele von Ihnen das am Kursende subjektiv so empfinden.

Grundlagen

Aussagenlogik

Mengenlehre

Zahlenmengen und
Rechenregeln

Potenzen und Logarithmen

Trigonometrie

Notation, Abkürzungen und
co.

Gleichungen

Ungleichungen

Funktionen

Folgen und Reihen

Grenzwerte und
Stetigkeit

Bezeichnung 1.3

Ist A eine Aussage, so bezeichnet $\neg A$ (gesprochen „nicht A “) die **Negation** der Aussage A .

$\neg A$ ist wieder eine Aussage, die wahr ist, wenn A falsch ist und falsch ist, wenn A wahr ist.

A
w
f

Tabelle: Wahrheitstafel von $\neg A$

Bezeichnung 1.3

Ist A eine Aussage, so bezeichnet $\neg A$ (gesprochen „nicht A “) die **Negation** der Aussage A .

$\neg A$ ist wieder eine Aussage, die wahr ist, wenn A falsch ist und falsch ist, wenn A wahr ist.

A	$\neg A$
w	f
f	w

Tabelle: Wahrheitstafel von $\neg A$

Beispiel 1.4

$$A \quad 2 + 2 = 4 \text{ (w)}$$

Beispiel 1.4

$$A \quad 2 + 2 = 4 \text{ (w)}$$

$$\neg A \quad 2 + 2 \neq 4 \text{ (f)}$$

Beispiel 1.4

$$A \quad 2 + 2 = 4 \text{ (w)}$$

$$\neg A \quad 2 + 2 \neq 4 \text{ (f)}$$

$$B \quad \text{Alle Menschen sind sterblich. (w)}$$

Beispiel 1.4

$$A \quad 2 + 2 = 4 \text{ (w)}$$

$$\neg A \quad 2 + 2 \neq 4 \text{ (f)}$$

$$B \quad \text{Alle Menschen sind sterblich. (w)}$$

$$\neg B \quad \text{Es existiert ein Mensch, der nicht sterblich ist. (f)}$$

Beispiel 1.4

$$A \quad 2 + 2 = 4 \text{ (w)}$$

$$\neg A \quad 2 + 2 \neq 4 \text{ (f)}$$

$$B \quad \text{Alle Menschen sind sterblich. (w)}$$

$$\neg B \quad \text{Es existiert ein Mensch, der nicht sterblich ist. (f)}$$

Das letzte Beispiel zeigt, dass bei Negationen genau auf die Formulierung zu achten ist.

Beispiel 1.4

- A $2 + 2 = 4$ (w)
 $\neg A$ $2 + 2 \neq 4$ (f)
 B Alle Menschen sind sterblich. (w)
 $\neg B$ Es existiert ein Mensch, der nicht sterblich ist. (f)
- Das letzte Beispiel zeigt, dass bei Negationen genau auf die Formulierung zu achten ist.
- C Alle Menschen sind unsterblich. (f)

Beispiel 1.4

- A $2 + 2 = 4$ (w)
 $\neg A$ $2 + 2 \neq 4$ (f)
 B Alle Menschen sind sterblich. (w)
 $\neg B$ Es existiert ein Mensch, der nicht sterblich ist. (f)
- Das letzte Beispiel zeigt, dass bei Negationen genau auf die Formulierung zu achten ist.
- C Alle Menschen sind unsterblich. (f)
 C ist nicht die Negation von Aussage B .

Beispiel 1.4

- A $2 + 2 = 4$ (w)
 $\neg A$ $2 + 2 \neq 4$ (f)
 B Alle Menschen sind sterblich. (w)
 $\neg B$ Es existiert ein Mensch, der nicht sterblich ist. (f)
Das letzte Beispiel zeigt, dass bei Negationen genau auf die Formulierung zu achten ist.
- C Alle Menschen sind unsterblich. (f)
 C ist nicht die Negation von Aussage B .
 D Für alle natürlichen Zahlen n gilt $n + 3 = 6$. (f)
 $\neg D$ Es existiert eine natürliche Zahl n , so dass $n + 3 \neq 6$ gilt. (w)

Verknüpfungen von Aussagen

Definition 1.5

Sind A und B Aussagen, so wird durch $A \wedge B$ (gesprochen „ A und B “) eine neue Aussage, die *Konjunktion* von A und B definiert.

$A \wedge B$ ist eine wahre Aussage, wenn sowohl A als auch B wahre Aussagen sind. Anders ausgedrückt ist $A \wedge B$ falsch, wenn (mindestens) eine der beiden Aussagen falsch ist.

A	B
w	w
w	f
f	w
f	f

Tabelle: Wahrheitstafel von $A \wedge B$

Verknüpfungen von Aussagen

Definition 1.5

Sind A und B Aussagen, so wird durch $A \wedge B$ (gesprochen „ A und B “) eine neue Aussage, die *Konjunktion* von A und B definiert.

$A \wedge B$ ist eine wahre Aussage, wenn sowohl A als auch B wahre Aussagen sind. Anders ausgedrückt ist $A \wedge B$ falsch, wenn (mindestens) eine der beiden Aussagen falsch ist.

A	B	$A \wedge B$
w	w	w
w	f	f
f	w	f
f	f	f

Tabelle: Wahrheitstafel von $A \wedge B$

Beispiel 1.6

$$A \quad 2 + 2 = 4 \text{ (w)}$$

Beispiel 1.6

A $2 + 2 = 4$ (w)

B 49 ist eine Primzahl (f)

Beispiel 1.6

A $2 + 2 = 4$ (w)

B 49 ist eine Primzahl (f)

C 49 ist eine Quadratzahl (w)

Beispiel 1.6

$$A \quad 2 + 2 = 4 \text{ (w)}$$

$$B \quad 49 \text{ ist eine Primzahl (f)}$$

$$C \quad 49 \text{ ist eine Quadratzahl (w)}$$

$$A \wedge B \quad 2 + 2 = 4 \text{ und } 49 \text{ ist eine Primzahl (f)}$$

Beispiel 1.6

$$A \quad 2 + 2 = 4 \text{ (w)}$$

$$B \quad 49 \text{ ist eine Primzahl (f)}$$

$$C \quad 49 \text{ ist eine Quadratzahl (w)}$$

$$A \wedge B \quad 2 + 2 = 4 \text{ und } 49 \text{ ist eine Primzahl (f)}$$

$$A \wedge C \quad 2 + 2 = 4 \text{ und } 49 \text{ ist eine Quadratzahl (w)}$$

Beispiel 1.6

A $2 + 2 = 4$ (w)

B 49 ist eine Primzahl (f)

C 49 ist eine Quadratzahl (w)

$A \wedge B$ $2 + 2 = 4$ und 49 ist eine Primzahl (f)

$A \wedge C$ $2 + 2 = 4$ und 49 ist eine Quadratzahl (w)

$B \wedge C$ 49 ist eine Primzahl und eine Quadratzahl (f)

Definition 1.7

Sind A und B Aussagen, so wird durch $A \vee B$ (gesprochen „ A oder B “) eine neue Aussage, die *Disjunktion* (nicht ausschließendes oder) von A und B definiert.

$A \vee B$ ist wahr, wenn mindestens eine der Aussagen A oder B wahr ist. Anders ausgedrückt ist $A \vee B$ nur dann falsch, wenn sowohl A als auch B falsch sind. Meint man „entweder A oder B “, so schreibt man $A \dot{\vee} B$ und spricht vom „exklusiven Oder“.

A	B
w	w
w	f
f	w
f	f

Tabelle: Wahrheitstafel von $A \vee B$ und $A \dot{\vee} B$

Definition 1.7

Sind A und B Aussagen, so wird durch $A \vee B$ (gesprochen „ A oder B “) eine neue Aussage, die *Disjunktion* (nicht ausschließendes oder) von A und B definiert.

$A \vee B$ ist wahr, wenn mindestens eine der Aussagen A oder B wahr ist. Anders ausgedrückt ist $A \vee B$ nur dann falsch, wenn sowohl A als auch B falsch sind. Meint man „entweder A oder B “, so schreibt man $A \dot{\vee} B$ und spricht vom „exklusiven Oder“.

A	B	$A \vee B$
w	w	w
w	f	w
f	w	w
f	f	f

Tabelle: Wahrheitstafel von $A \vee B$ und $A \dot{\vee} B$

Definition 1.7

Sind A und B Aussagen, so wird durch $A \vee B$ (gesprochen „ A oder B “) eine neue Aussage, die *Disjunktion* (nicht ausschließendes oder) von A und B definiert.

$A \vee B$ ist wahr, wenn mindestens eine der Aussagen A oder B wahr ist. Anders ausgedrückt ist $A \vee B$ nur dann falsch, wenn sowohl A als auch B falsch sind. Meint man „entweder A oder B “, so schreibt man $A \dot{\vee} B$ und spricht vom „exklusiven Oder“.

A	B	$A \vee B$	$A \dot{\vee} B$
w	w	w	f
w	f	w	w
f	w	w	w
f	f	f	f

Tabelle: Wahrheitstafel von $A \vee B$ und $A \dot{\vee} B$

Beispiel 1.8

A $2 + 2 = 4$ (w)

B 49 ist eine Primzahl (f)

C 49 ist eine Quadratzahl (w)

Grundlagen

Aussagenlogik

Mengenlehre

Zahlenmengen und
Rechenregeln

Potenzen und Logarithmen

Trigonometrie

Notation, Abkürzungen und
co.

Gleichungen

Ungleichungen

Funktionen

Folgen und Reihen

Grenzwerte und Stetigkeit

Beispiel 1.8

A $2 + 2 = 4$ (w)

B 49 ist eine Primzahl (f)

C 49 ist eine Quadratzahl (w)

$A \vee B$ $2 + 2 = 4$ oder 49 ist eine Primzahl. (w)

Grundlagen

Aussagenlogik

Mengenlehre

Zahlenmengen und
Rechenregeln

Potenzen und Logarithmen

Trigonometrie

Notation, Abkürzungen und
co.

Gleichungen

Ungleichungen

Funktionen

Folgen und Reihen

Grenzwerte und Stetigkeit

Beispiel 1.8

A $2 + 2 = 4$ (w)

B 49 ist eine Primzahl (f)

C 49 ist eine Quadratzahl (w)

$A \vee B$ $2 + 2 = 4$ oder 49 ist eine Primzahl. (w)

$A \vee C$ $2 + 2 = 4$ oder 49 ist eine Quadratzahl. (w)

Beispiel 1.8

A $2 + 2 = 4$ (w)

B 49 ist eine Primzahl (f)

C 49 ist eine Quadratzahl (w)

$A \vee B$ $2 + 2 = 4$ oder 49 ist eine Primzahl. (w)

$A \vee C$ $2 + 2 = 4$ oder 49 ist eine Quadratzahl. (w)

$B \vee C$ 49 ist eine Primzahl oder eine Quadratzahl. (w)

Beispiel 1.8

A $2 + 2 = 4$ (w)

B 49 ist eine Primzahl (f)

C 49 ist eine Quadratzahl (w)

$A \vee B$ $2 + 2 = 4$ oder 49 ist eine Primzahl. (w)

$A \vee C$ $2 + 2 = 4$ oder 49 ist eine Quadratzahl. (w)

$B \vee C$ 49 ist eine Primzahl oder eine Quadratzahl. (w)

Bemerkung 1.9

Dieses Beispiel macht noch einmal deutlich, dass sich das aussagenlogische „oder“ vom üblichen Sprachgebrauch unterscheidet.

Definition 1.10

Sind A und B Aussagen, so wird durch $A \implies B$ (gesprochen „wenn A dann B “ oder „aus A folgt B “) wieder eine Aussage definiert, die *Implikation* (oder Folgerung) genannt wird.

Die Implikation $A \implies B$ ist nur dann eine falsche Aussage, wenn A wahr und B falsch ist.

Merke: *Aus einer falschen Aussage kann eine wahre Aussage folgen.
Aus einer wahren Aussage folgt aber niemals eine falsche!*

A	B
w	w
w	f
f	w
f	f

Tabelle: Wahrheitstafel von $A \implies B$

Definition 1.10

Sind A und B Aussagen, so wird durch $A \implies B$ (gesprochen „wenn A dann B “ oder „aus A folgt B “) wieder eine Aussage definiert, die *Implikation* (oder Folgerung) genannt wird.

Die Implikation $A \implies B$ ist nur dann eine falsche Aussage, wenn A wahr und B falsch ist.

Merke: *Aus einer falschen Aussage kann eine wahre Aussage folgen.
Aus einer wahren Aussage folgt aber niemals eine falsche!*

A	B	$A \implies B$
w	w	w
w	f	f
f	w	w
f	f	w

Tabelle: Wahrheitstafel von $A \implies B$

Beispiel 1.11

A 4 ist Teiler von 8. (w)

Beispiel 1.11

A 4 ist Teiler von 8. (w)

B 2 ist Teiler von 8. (w)

Beispiel 1.11

A 4 ist Teiler von 8. (w)

B 2 ist Teiler von 8. (w)

$A \Rightarrow B$ Wenn 4 Teiler von 8 ist, dann ist 2 Teiler von 8. (w)

Beispiel 1.11

A 4 ist Teiler von 8. (w)

B 2 ist Teiler von 8. (w)

$A \Rightarrow B$ Wenn 4 Teiler von 8 ist, dann ist 2 Teiler von 8. (w)

$B \Rightarrow A$ Wenn 2 Teiler von 8 ist, dann ist 4 Teiler von 8. (w)

Beispiel 1.11

A 4 ist Teiler von 8. (w)

B 2 ist Teiler von 8. (w)

$A \Rightarrow B$ Wenn 4 Teiler von 8 ist, dann ist 2 Teiler von 8. (w)

$B \Rightarrow A$ Wenn 2 Teiler von 8 ist, dann ist 4 Teiler von 8. (w)

Beispiel 1.12

A 4 ist Teiler von 10. (f)

Beispiel 1.11

A 4 ist Teiler von 8. (w)

B 2 ist Teiler von 8. (w)

$A \Rightarrow B$ Wenn 4 Teiler von 8 ist, dann ist 2 Teiler von 8. (w)

$B \Rightarrow A$ Wenn 2 Teiler von 8 ist, dann ist 4 Teiler von 8. (w)

Beispiel 1.12

A 4 ist Teiler von 10. (f)

B 2 ist Teiler von 10. (w)

Beispiel 1.11

A 4 ist Teiler von 8. (w)

B 2 ist Teiler von 8. (w)

$A \Rightarrow B$ Wenn 4 Teiler von 8 ist, dann ist 2 Teiler von 8. (w)

$B \Rightarrow A$ Wenn 2 Teiler von 8 ist, dann ist 4 Teiler von 8. (w)

Beispiel 1.12

A 4 ist Teiler von 10. (f)

B 2 ist Teiler von 10. (w)

$A \Rightarrow B$ Wenn 4 Teiler von 10 ist, dann ist 2 Teiler von 10. (w)

Beispiel 1.11

A 4 ist Teiler von 8. (w)

B 2 ist Teiler von 8. (w)

$A \Rightarrow B$ Wenn 4 Teiler von 8 ist, dann ist 2 Teiler von 8. (w)

$B \Rightarrow A$ Wenn 2 Teiler von 8 ist, dann ist 4 Teiler von 8. (w)

Beispiel 1.12

A 4 ist Teiler von 10. (f)

B 2 ist Teiler von 10. (w)

$A \Rightarrow B$ Wenn 4 Teiler von 10 ist, dann ist 2 Teiler von 10. (w)

$B \Rightarrow A$ Wenn 2 Teiler von 10 ist, dann ist 4 Teiler von 10. (f)

Beispiel 1.11

A 4 ist Teiler von 8. (w)

B 2 ist Teiler von 8. (w)

$A \Rightarrow B$ Wenn 4 Teiler von 8 ist, dann ist 2 Teiler von 8. (w)

$B \Rightarrow A$ Wenn 2 Teiler von 8 ist, dann ist 4 Teiler von 8. (w)

Beispiel 1.12

A 4 ist Teiler von 10. (f)

B 2 ist Teiler von 10. (w)

$A \Rightarrow B$ Wenn 4 Teiler von 10 ist, dann ist 2 Teiler von 10. (w)

$B \Rightarrow A$ Wenn 2 Teiler von 10 ist, dann ist 4 Teiler von 10. (f)

Bemerkung 1.13

Die Implikation behauptet keinen inhaltlichen Zusammenhang zwischen Voraussetzung und Schlussfolgerung.

Definition 1.14

Sind A und B Aussagen, dann ist $(A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A)$ ebenfalls eine Aussage, die **Äquivalenz** $A \Longleftrightarrow B$ (gesprochen „ A äquivalent zu B “ oder „ A genau dann wenn B “).

$A \Longleftrightarrow B$ ist eine wahre Aussage, wenn A und B die gleichen Wahrheitswerte haben, d. h. entweder beide wahr oder beide falsch sind.

A	B
w	w
w	f
f	w
f	f

Tabelle: Wahrheitstafel von $A \Longleftrightarrow B$

Definition 1.14

Sind A und B Aussagen, dann ist $(A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A)$ ebenfalls eine Aussage, die *Äquivalenz* $A \Longleftrightarrow B$ (gesprochen „ A äquivalent zu B “ oder „ A genau dann wenn B “).

$A \Longleftrightarrow B$ ist eine wahre Aussage, wenn A und B die gleichen Wahrheitswerte haben, d. h. entweder beide wahr oder beide falsch sind.

A	B	$A \Rightarrow B$	$B \Rightarrow A$
w	w	w	w
w	f	f	w
f	w	w	f
f	f	w	w

Tabelle: Wahrheitstafel von $A \Longleftrightarrow B$

Definition 1.14

Sind A und B Aussagen, dann ist $(A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A)$ ebenfalls eine Aussage, die **Äquivalenz** $A \Longleftrightarrow B$ (gesprochen „ A äquivalent zu B “ oder „ A genau dann wenn B “).

$A \Longleftrightarrow B$ ist eine wahre Aussage, wenn A und B die gleichen Wahrheitswerte haben, d. h. entweder beide wahr oder beide falsch sind.

A	B	$A \Rightarrow B$	$B \Rightarrow A$	$A \Longleftrightarrow B$
w	w	w	w	w
w	f	f	w	f
f	w	w	f	f
f	f	w	w	w

Tabelle: Wahrheitstafel von $A \Longleftrightarrow B$

Grundlagen

Aussagenlogik

Mengenlehre

Zahlenmengen und
Rechenregeln

Potenzen und Logarithmen

Trigonometrie

Notation, Abkürzungen und
co.

Gleichungen

Ungleichungen

Funktionen

Folgen und Reihen

Grenzwerte und
Stetigkeit

Beispiel 1.15

A 2 ist Teiler von 10. (w)

B 4 ist Teiler von 10. (f)

Beispiel 1.15

A 2 ist Teiler von 10. (w)

B 4 ist Teiler von 10. (f)

$A \Rightarrow B$ Wenn 2 Teiler von 10 ist, dann ist 4 Teiler von 10. (f)

$B \Rightarrow A$ Wenn 4 Teiler von 10 ist, dann ist 2 Teiler von 10. (w)

Beispiel 1.15

A 2 ist Teiler von 10. (w)

B 4 ist Teiler von 10. (f)

$A \Rightarrow B$ Wenn 2 Teiler von 10 ist, dann ist 4 Teiler von 10. (f)

$B \Rightarrow A$ Wenn 4 Teiler von 10 ist, dann ist 2 Teiler von 10. (w)

$A \Leftrightarrow B$ 2 ist Teiler von 10, genau dann wenn 4 Teiler von 10 ist. (f)

Definition 1.16

Man nennt zwei Verknüpfungen der Aussagen $A, B, C, \dots$ *gleichwertig* oder *äquivalent* (Schreibweise: „ $\Leftrightarrow$ “), wenn sie bei gleichen Wahrheitswerten für $A, B, C, \dots$ gleiche Wahrheitswerte annehmen.

Definition 1.16

Man nennt zwei Verknüpfungen der Aussagen $A, B, C, \dots$ *gleichwertig* oder *äquivalent* (Schreibweise: „ $\Leftrightarrow$ “), wenn sie bei gleichen Wahrheitswerten für $A, B, C, \dots$ gleiche Wahrheitswerte annehmen.

Beispiel 1.17

$A \Rightarrow B$ und $(\neg B) \Rightarrow (\neg A)$ sind gleichwertig:

A	B	$A \Rightarrow B$
w	w	w
w	f	f
f	w	w
f	f	w

Tabelle: Wahrheitstafel zu $(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow ((\neg B) \Rightarrow (\neg A))$

Definition 1.16

Man nennt zwei Verknüpfungen der Aussagen $A, B, C, \dots$ *gleichwertig* oder *äquivalent* (Schreibweise: „ $\Leftrightarrow$ “), wenn sie bei gleichen Wahrheitswerten für $A, B, C, \dots$ gleiche Wahrheitswerte annehmen.

Beispiel 1.17

$A \Rightarrow B$ und $(\neg B) \Rightarrow (\neg A)$ sind gleichwertig:

A	B	$A \Rightarrow B$	$\neg B$	$\neg A$	$(\neg B) \Rightarrow (\neg A)$
w	w	w	f	f	w
w	f	f	w	f	f
f	w	w	f	w	w
f	f	w	w	w	w

Tabelle: Wahrheitstafel zu $(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow ((\neg B) \Rightarrow (\neg A))$

$$A \wedge B \iff B \wedge A$$

$$A \vee B \iff B \vee A$$

(Kommutativgesetz)

Umformungsregeln

$$A \wedge B \iff B \wedge A$$

$$A \vee B \iff B \vee A$$

(Kommutativgesetz)

$$A \wedge (B \wedge C) \iff (A \wedge B) \wedge C$$

$$A \vee (B \vee C) \iff (A \vee B) \vee C$$

(Assoziativgesetz)

$$A \wedge B \iff B \wedge A$$

$$A \vee B \iff B \vee A$$

(Kommutativgesetz)

$$A \wedge (B \wedge C) \iff (A \wedge B) \wedge C$$

$$A \vee (B \vee C) \iff (A \vee B) \vee C$$

(Assoziativgesetz)

$$A \wedge (B \vee C) \iff (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$$

$$A \vee (B \wedge C) \iff (A \vee B) \wedge (A \vee C)$$

(Distributivgesetz)

$$A \wedge B \iff B \wedge A$$

$$A \vee B \iff B \vee A$$

(Kommutativgesetz)

$$A \wedge (B \wedge C) \iff (A \wedge B) \wedge C$$

$$A \vee (B \vee C) \iff (A \vee B) \vee C$$

(Assoziativgesetz)

$$A \wedge (B \vee C) \iff (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$$

$$A \vee (B \wedge C) \iff (A \vee B) \wedge (A \vee C)$$

(Distributivgesetz)

$$\neg(\neg A) \iff A$$

(Doppelte Verneinung)

Umformungsregeln

$A \wedge B \iff B \wedge A$	(Kommutativgesetz)
$A \vee B \iff B \vee A$	
$A \wedge (B \wedge C) \iff (A \wedge B) \wedge C$	(Assoziativgesetz)
$A \vee (B \vee C) \iff (A \vee B) \vee C$	
$A \wedge (B \vee C) \iff (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$	(Distributivgesetz)
$A \vee (B \wedge C) \iff (A \vee B) \wedge (A \vee C)$	
$\neg(\neg A) \iff A$	(Doppelte Verneinung)
$\neg(A \wedge B) \iff (\neg A) \vee (\neg B)$	(Regel von De Morgan)
$\neg(A \vee B) \iff (\neg A) \wedge (\neg B)$	

Tabelle: Umformungsregeln für aussagenlogische Terme

A	B	C
w	w	w
w	w	f
w	f	w
w	f	f
f	w	w
f	w	f
f	f	w
f	f	f

Tabelle: Wahrheitstafel zum Assoziativgesetz $A \wedge (B \wedge C) \iff (A \wedge B) \wedge C$

A	B	C	$B \wedge C$
w	w	w	w
w	w	f	f
w	f	w	f
w	f	f	f
f	w	w	w
f	w	f	f
f	f	w	f
f	f	f	f

Tabelle: Wahrheitstafel zum Assoziativgesetz $A \wedge (B \wedge C) \iff (A \wedge B) \wedge C$

A	B	C	$B \wedge C$	$A \wedge (B \wedge C)$
w	w	w	w	w
w	w	f	f	f
w	f	w	f	f
w	f	f	f	f
f	w	w	w	f
f	w	f	f	f
f	f	w	f	f
f	f	f	f	f

Tabelle: Wahrheitstafel zum Assoziativgesetz $A \wedge (B \wedge C) \iff (A \wedge B) \wedge C$

A	B	C	$B \wedge C$	$A \wedge (B \wedge C)$	$A \wedge B$
w	w	w	w	w	w
w	w	f	f	f	w
w	f	w	f	f	f
w	f	f	f	f	f
f	w	w	w	f	f
f	w	f	f	f	f
f	f	w	f	f	f
f	f	f	f	f	f

Tabelle: Wahrheitstafel zum Assoziativgesetz $A \wedge (B \wedge C) \iff (A \wedge B) \wedge C$

A	B	C	$B \wedge C$	$A \wedge (B \wedge C)$	$A \wedge B$	$(A \wedge B) \wedge C$
w	w	w	w	w	w	w
w	w	f	f	f	w	f
w	f	w	f	f	f	f
w	f	f	f	f	f	f
f	w	w	w	f	f	f
f	w	f	f	f	f	f
f	f	w	f	f	f	f
f	f	f	f	f	f	f

Tabelle: Wahrheitstafel zum Assoziativgesetz $A \wedge (B \wedge C) \iff (A \wedge B) \wedge C$

Beispiel 1.18 (Assoziativgesetz)

- $A:$ 2 ist Teiler von 6. (w)
 $B:$ 3 ist Teiler von 6. (w)
 $C:$ 4 ist Teiler von 6. (f)

Beispiel 1.18 (Assoziativgesetz)

A : 2 ist Teiler von 6. (w)

B : 3 ist Teiler von 6. (w)

C : 4 ist Teiler von 6. (f)

$A \wedge (B \wedge C)$: 2 Teiler von 6 und (3 und 4 Teiler von 6) (f)

$(A \wedge B) \wedge C$: (2 und 3 Teiler von 6) und 4 Teiler von 6 (f)

Das Assoziativgesetz besagt, dass die Klammern weggelassen werden dürfen.

$A \wedge B \wedge C$: 2 und 3 und 4 sind Teiler von 6. (f)

Beispiel 1.19 (Doppelte Verneinung)

A 2 ist Teiler von 6. (w)

Beispiel 1.19 (Doppelte Verneinung)

A 2 ist Teiler von 6. (w)

$\neg A$ 2 ist nicht Teiler von 6. (f)

Beispiel 1.19 (Doppelte Verneinung)

A 2 ist Teiler von 6. (w)

$\neg A$ 2 ist nicht Teiler von 6. (f)

$\neg(\neg A)$ Es gilt nicht, dass 2 nicht Teiler von 6 ist. (w)

B Jede Primzahl $p > 2$ ist ungerade. (w)

Beispiel 1.19 (Doppelte Verneinung)

A 2 ist Teiler von 6. (w)

$\neg A$ 2 ist nicht Teiler von 6. (f)

$\neg(\neg A)$ Es gilt nicht, dass 2 nicht Teiler von 6 ist. (w)

B Jede Primzahl $p > 2$ ist ungerade. (w)

$\neg B$ Es gilt nicht, dass jede Primzahl $p > 2$ ungerade ist. (f)

Beispiel 1.19 (Doppelte Verneinung)

A 2 ist Teiler von 6. (w)

$\neg A$ 2 ist nicht Teiler von 6. (f)

$\neg(\neg A)$ Es gilt nicht, dass 2 nicht Teiler von 6 ist. (w)

B Jede Primzahl $p > 2$ ist ungerade. (w)

$\neg B$ Es gilt nicht, dass jede Primzahl $p > 2$ ungerade ist. (f)
bzw. es existiert eine Primzahl $p > 2$, die gerade ist. (f)

Beispiel 1.19 (Doppelte Verneinung)

A 2 ist Teiler von 6. (w)

$\neg A$ 2 ist nicht Teiler von 6. (f)

$\neg(\neg A)$ Es gilt nicht, dass 2 nicht Teiler von 6 ist. (w)

B Jede Primzahl $p > 2$ ist ungerade. (w)

$\neg B$ Es gilt nicht, dass jede Primzahl $p > 2$ ungerade ist. (f)
bzw. es existiert eine Primzahl $p > 2$, die gerade ist. (f)

$\neg(\neg B)$ Es gilt nicht, dass es eine Primzahl $p > 2$ gibt, die gerade ist. (w)

Beispiel 1.19 (Doppelte Verneinung)

A 2 ist Teiler von 6. (w)

$\neg A$ 2 ist nicht Teiler von 6. (f)

$\neg(\neg A)$ Es gilt nicht, dass 2 nicht Teiler von 6 ist. (w)

B Jede Primzahl $p > 2$ ist ungerade. (w)

$\neg B$ Es gilt nicht, dass jede Primzahl $p > 2$ ungerade ist. (f)
bzw. es existiert eine Primzahl $p > 2$, die gerade ist. (f)

$\neg(\neg B)$ Es gilt nicht, dass es eine Primzahl $p > 2$ gibt, die gerade ist. (w)
bzw. jede Primzahl $p > 2$ ist ungerade. (w)

Definition 1.20

Eine Aussage, die aus der Verknüpfung mehrerer Aussagen hervorgeht, ist eine *Tautologie*, wenn für alle möglichen Wahrheitswerte der für die Verknüpfung verwendeten Aussagen, die Aussage insgesamt stets wahr ist.

Definition 1.20

Eine Aussage, die aus der Verknüpfung mehrerer Aussagen hervorgeht, ist eine *Tautologie*, wenn für alle möglichen Wahrheitswerte der für die Verknüpfung verwendeten Aussagen, die Aussage insgesamt stets wahr ist.

Beispiel 1.21

- $A \vee (\neg A)$, der *Satz vom ausgeschlossenen Dritten*, ist eine Tautologie.
Es regnet oder es regnet nicht – es gibt keine dritte Möglichkeit.

A
w
f

Tabelle: Wahrheitstafel von $A \vee (\neg A)$

Definition 1.20

Eine Aussage, die aus der Verknüpfung mehrerer Aussagen hervorgeht, ist eine *Tautologie*, wenn für alle möglichen Wahrheitswerte der für die Verknüpfung verwendeten Aussagen, die Aussage insgesamt stets wahr ist.

Beispiel 1.21

- $A \vee (\neg A)$, der *Satz vom ausgeschlossenen Dritten*, ist eine Tautologie.
Es regnet oder es regnet nicht – es gibt keine dritte Möglichkeit.

$A \quad \neg A$	
w	f
f	w

Tabelle: Wahrheitstafel von $A \vee (\neg A)$

Definition 1.20

Eine Aussage, die aus der Verknüpfung mehrerer Aussagen hervorgeht, ist eine *Tautologie*, wenn für alle möglichen Wahrheitswerte der für die Verknüpfung verwendeten Aussagen, die Aussage insgesamt stets wahr ist.

Beispiel 1.21

- $A \vee (\neg A)$, der *Satz vom ausgeschlossenen Dritten*, ist eine Tautologie.
Es regnet oder es regnet nicht – es gibt keine dritte Möglichkeit.

A	$\neg A$	$A \vee (\neg A)$
w	f	w
f	w	w

Tabelle: Wahrheitstafel von $A \vee (\neg A)$

Beispiel 1.21 (fort.)

- $\neg(A \wedge (\neg A))$, das *Gesetz vom Widerspruch*, ist eine Tautologie. Es regnet und es regnet nicht ist immer falsch, die Negation daher stets richtig.

A
w
f

Tabelle: Wahrheitstafel von $\neg(A \wedge (\neg A))$

Beispiel 1.21 (fort.)

- $\neg(A \wedge (\neg A))$, das *Gesetz vom Widerspruch*, ist eine Tautologie. Es regnet und es regnet nicht ist immer falsch, die Negation daher stets richtig.

A	$\neg A$
w	f
f	w

Tabelle: Wahrheitstafel von $\neg(A \wedge (\neg A))$

Beispiel 1.21 (fort.)

- $\neg(A \wedge (\neg A))$, das *Gesetz vom Widerspruch*, ist eine Tautologie. Es regnet und es regnet nicht ist immer falsch, die Negation daher stets richtig.

A	$\neg A$	$A \wedge (\neg A)$
w	f	f
f	w	f

Tabelle: Wahrheitstafel von $\neg(A \wedge (\neg A))$

Beispiel 1.21 (fort.)

- $\neg(A \wedge (\neg A))$, das *Gesetz vom Widerspruch*, ist eine Tautologie. Es regnet und es regnet nicht ist immer falsch, die Negation daher stets richtig.

A	$\neg A$	$A \wedge (\neg A)$	$\neg(A \wedge (\neg A))$
w	f	f	w
f	w	f	w

Tabelle: Wahrheitstafel von $\neg(A \wedge (\neg A))$

Beispiel 1.21 (fort.)

- $(A \implies B) \iff ((\neg A) \vee B)$ ist eine Tautologie.

A	B
w	w
w	f
f	w
f	f

Tabelle: Wahrheitstafel von $(A \implies B) \iff ((\neg A) \vee B)$

Beispiel 1.21 (fort.)

- $(A \implies B) \iff ((\neg A) \vee B)$ ist eine Tautologie.

A	B	$A \implies B$
w	w	w
w	f	f
f	w	w
f	f	w

Tabelle: Wahrheitstafel von $(A \implies B) \iff ((\neg A) \vee B)$

Beispiel 1.21 (fort.)

- $(A \implies B) \iff ((\neg A) \vee B)$ ist eine Tautologie.

A	B	$A \implies B$	$\neg A$
w	w	w	f
w	f	f	f
f	w	w	w
f	f	w	w

Tabelle: Wahrheitstafel von $(A \implies B) \iff ((\neg A) \vee B)$

Beispiel 1.21 (fort.)

- $(A \implies B) \iff ((\neg A) \vee B)$ ist eine Tautologie.

A	B	$A \implies B$	$\neg A$	$(\neg A) \vee B$
w	w	w	f	w
w	f	f	f	f
f	w	w	w	w
f	f	w	w	w

Tabelle: Wahrheitstafel von $(A \implies B) \iff ((\neg A) \vee B)$

Beispiel 1.21 (fort.)

- $(A \implies B) \iff ((\neg A) \vee B)$ ist eine Tautologie.

A	B	$A \implies B$	$\neg A$	$(\neg A) \vee B$	$(A \implies B) \iff ((\neg A) \vee B)$
w	w	w	f	w	w
w	f	f	f	f	w
f	w	w	w	w	w
f	f	w	w	w	w

Tabelle: Wahrheitstafel von $(A \implies B) \iff ((\neg A) \vee B)$

Definition 1.22

Eine *Aussageform* ist eine Behauptung, die eine oder mehrere Variablen enthält. Eine Aussageform wird zu einer Aussage, wenn für die Variablen Elemente des zugehörigen Grundbereiches eingesetzt werden.

Definition 1.22

Eine *Aussageform* ist eine Behauptung, die eine oder mehrere Variablen enthält. Eine Aussageform wird zu einer Aussage, wenn für die Variablen Elemente des zugehörigen Grundbereiches eingesetzt werden.

Setzt man Elemente des Grundbereiches ein, so dass die Aussageform eine wahre Aussage ergibt, so nennt man diese *Lösung der Aussageform*.

Beispiel 1.23

Grundbereich: $\mathbb{Z}$ (Menge der ganzen Zahlen)

$A(x)$ $x + 7 = 0$ ist eine Aussageform mit der Variablen x .

$A(-7)$ $-7 + 7 = 0$ (w) ist eine Aussage mit dem Wahrheitswert (w).

$A(0)$ $0 + 7 = 0$ (f) ist eine Aussage mit dem Wahrheitswert (f).

Beispiel 1.23

Grundbereich: $\mathbb{Z}$ (Menge der ganzen Zahlen)

$A(x)$ $x + 7 = 0$ ist eine Aussageform mit der Variablen x .

$A(-7)$ $-7 + 7 = 0$ (w) ist eine Aussage mit dem Wahrheitswert (w).

$A(0)$ $0 + 7 = 0$ (f) ist eine Aussage mit dem Wahrheitswert (f).

Bemerkung 1.24

Aussageformen mit demselben Grundbereich kann man wie Aussagen miteinander verknüpfen und erhält wieder eine Aussageform.

Definition 1.25

Als *Menge* bezeichnet man die Zusammenfassung unterschiedlicher Objekte, die *Elemente* genannt werden.

Eine Menge, die kein Element enthält, heißt *leere Menge* und wird mit dem Symbol $\{ \}$ (oder $\emptyset$) bezeichnet.

Zwei Mengen A und B sind gleich, wenn sie dieselben Elemente enthalten.

Man schreibt dann $A = B$.

Beispiel 1.26

- ▶ Menge der Teilnehmer am Vorkurs Mathematik
- ▶ Menge der Zahlen 2,3,5,7.
- ▶ Menge der Telefonnummern in Wuppertal

Beispiel 1.26

- ▶ Menge der Teilnehmer am Vorkurs Mathematik
- ▶ Menge der Zahlen 2,3,5,7.
- ▶ Menge der Telefonnummern in Wuppertal

Bezeichnung 1.27

Mengen werden in der Regel mit großen Buchstaben, die Elemente mit kleinen Buchstaben bezeichnet.

- ▶ $x \in A$: x ist Element von A .
- ▶ $x \notin A$: x ist nicht Element von A .

Beschreibung von Mengen

Man unterscheidet die aufzählende und die beschreibende Form. Bei der aufzählenden Form werden alle Elemente in beliebiger Reihenfolge zwischen zwei geschweiften Klammern aufgelistet, z. B.

$$A = \{1, 2, 3, 4, 5\} \text{ oder auch } A = \{2, 5, 1, 4, 3\}.$$

Man unterscheidet die aufzählende und die beschreibende Form. Bei der aufzählenden Form werden alle Elemente in beliebiger Reihenfolge zwischen zwei geschweiften Klammern aufgelistet, z. B.

$$A = \{1, 2, 3, 4, 5\} \text{ oder auch } A = \{2, 5, 1, 4, 3\}.$$

Häufig ist es unpraktisch oder auch nicht möglich, eine Menge in der aufzählenden Form anzugeben. Bei der beschreibenden Form werden die Elemente mit Hilfe von Aussageformen unter Angabe der Grundmenge spezifiziert, z. B.

$$A = \{x \in \mathbb{Z} : x \geq 1 \wedge x \leq 5\} = \{x \in \mathbb{Z} : 1 \leq x \leq 5\}.$$

Häufig möchte man logische Aussagen über die Elemente einer Menge treffen. Insbesondere ist es interessant ob alle oder zumindest ein Element eine bestimmte Bedingung (Aussageform) erfüllen. Daher werden die folgenden Abkürzungen verwendet:

- $\exists$ es existiert *mindestens ein* Element in der Menge, das die folgende Aussage erfüllt
- $\forall$ *alle* Elemente der Menge erfüllen die folgende Aussage

Häufig möchte man logische Aussagen über die Elemente einer Menge treffen. Insbesondere ist es interessant ob alle oder zumindest ein Element eine bestimmte Bedingung (Aussageform) erfüllen. Daher werden die folgenden Abkürzungen verwendet:

- $\exists$ es existiert *mindestens ein* Element in der Menge, das die folgende Aussage erfüllt
- $\forall$ *alle* Elemente der Menge erfüllen die folgende Aussage

Beispiel 1.28

- ▶ $\forall x \in A = \{1, 2, 3, 4, 5\} : x \geq 0$
- ▶ $\exists a \in \mathbb{Z} : \sqrt{a} \notin \mathbb{Z}$

Definition 1.29

$A \subseteq B$ (gesprochen „ A ist Teilmenge von B “), wenn jedes Element von A auch Element von B ist, d.h.

$$A \subseteq B \iff (x \in A \implies x \in B)$$

Definition 1.29

$A \subseteq B$ (gesprochen „ A ist Teilmenge von B “), wenn jedes Element von A auch Element von B ist, d.h.

$$A \subseteq B \iff (x \in A \implies x \in B)$$

Beispiel 1.30

- ▶ $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$
- ▶ $B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
- ▶ $A \subseteq B$, aber $B \not\subseteq A$

Definition 1.31

Zwei Mengen A und B sind genau dann gleich wenn gilt:

$(A \subseteq B) \wedge (B \subseteq A)$. Um zu zeigen, dass zwei Mengen A und B gleich sind, verwendet man meistens diesen Zusammenhang, d. h. man zeigt dass jedes Element $a \in A$ auch in B enthalten ist und dass jedes Element $b \in B$ auch in A enthalten ist.

Definition 1.31

Zwei Mengen A und B sind genau dann gleich wenn gilt:

$(A \subseteq B) \wedge (B \subseteq A)$. Um zu zeigen, dass zwei Mengen A und B gleich sind, verwendet man meistens diesen Zusammenhang, d. h. man zeigt dass jedes Element $a \in A$ auch in B enthalten ist und dass jedes Element $b \in B$ auch in A enthalten ist.

Möchte man ausdrücken, dass A eine *echte Teilmenge* von B ist, d. h. nicht gleich B , so schreibt man:

$$A \subset B \iff (x \in A \implies x \in B) \wedge (A \neq B)$$

Definition 1.31

Zwei Mengen A und B sind genau dann gleich wenn gilt:

$(A \subseteq B) \wedge (B \subseteq A)$. Um zu zeigen, dass zwei Mengen A und B gleich sind, verwendet man meistens diesen Zusammenhang, d. h. man zeigt dass jedes Element $a \in A$ auch in B enthalten ist und dass jedes Element $b \in B$ auch in A enthalten ist.

Möchte man ausdrücken, dass A eine *echte Teilmenge* von B ist, d. h. nicht gleich B , so schreibt man:

$$A \subset B \iff (x \in A \implies x \in B) \wedge (A \neq B)$$

Beispiel 1.32

- ▶ $\{1, 2, 3, 4, 5\} = \{2, 5, 1, 4, 3\}$
- ▶ $\{1, 2, 3, 4, 5\} \subset \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

Definition 1.33

Als *Durchschnitt* $A \cap B$ zweier Mengen A und B bezeichnet man die Menge aller Elemente, die zu A *und* zu B gehören, d. h.

$$A \cap B = \{x : x \in A \wedge x \in B\}.$$

Ist $A \cap B = \{ \}$, so heißen A und B *disjunkt*.

Definition 1.33

Als *Durchschnitt* $A \cap B$ zweier Mengen A und B bezeichnet man die Menge aller Elemente, die zu A *und* zu B gehören, d. h.

$$A \cap B = \{x : x \in A \wedge x \in B\}.$$

Ist $A \cap B = \{ \}$, so heißen A und B *disjunkt*.

Die *Vereinigung* $A \cup B$ zweier Mengen A und B ist die Menge aller Elemente, die zu A *oder* zu B gehören, d. h. $A \cup B = \{x : x \in A \vee x \in B\}$.

Definition 1.33

Als *Durchschnitt* $A \cap B$ zweier Mengen A und B bezeichnet man die Menge aller Elemente, die zu A *und* zu B gehören, d. h.

$$A \cap B = \{x : x \in A \wedge x \in B\}.$$

Ist $A \cap B = \{ \}$, so heißen A und B *disjunkt*.

Die *Vereinigung* $A \cup B$ zweier Mengen A und B ist die Menge aller Elemente, die zu A *oder* zu B gehören, d. h. $A \cup B = \{x : x \in A \vee x \in B\}$.

- ▶ $\{1, 2, 3, 4, 5\} \cap \{3, 4, 5, 6, 7\} = \{3, 4, 5\}$
- ▶ $\{1, 2, 3, 4, 5\} \cup \{3, 4, 5, 6, 7\} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$

Definition 1.33

Die *Differenzmenge* $A \setminus B$ von A und B ist die Menge aller Elemente von A , die nicht zu B gehören, d. h. $A \setminus B = \{x : x \in A \wedge x \notin B\}$.

Definition 1.33

Die *Differenzmenge* $A \setminus B$ von A und B ist die Menge aller Elemente von A , die nicht zu B gehören, d. h. $A \setminus B = \{x : x \in A \wedge x \notin B\}$.

Das *Komplement* $\mathcal{C}(A)$ (man schreibt auch $\bar{A}$) einer Menge A bezogen auf eine Grundmenge Ω besteht aus allen Elementen von Ω , die nicht zu A gehören, d. h. $\mathcal{C}(A) = \bar{A} = \{x \in \Omega : x \notin A\} = \Omega \setminus A$

Definition 1.33

Die *Differenzmenge* $A \setminus B$ von A und B ist die Menge aller Elemente von A , die nicht zu B gehören, d. h. $A \setminus B = \{x : x \in A \wedge x \notin B\}$.

Das *Komplement* $\mathcal{C}(A)$ (man schreibt auch $\bar{A}$) einer Menge A bezogen auf eine Grundmenge Ω besteht aus allen Elementen von Ω , die nicht zu A gehören, d. h. $\mathcal{C}(A) = \bar{A} = \{x \in \Omega : x \notin A\} = \Omega \setminus A$

- ▶ $\{1, 2, 3, 4, 5\} \setminus \{3, 4, 5, 6, 7\} = \{1, 2\}$
- ▶ Grundmenge $\mathbb{Z}$: $\mathcal{C}(\{1, 2, 3, 4, 5\}) = \{x \in \mathbb{Z} : x \leq 0 \vee x \geq 6\}$

Beispiel 1.34

Die Grundmenge Ω sei die Menge aller Studierenden an der Bergischen Universität Wuppertal.

- I Menge aller Studierenden der Ingenieurwissenschaften
- F Menge aller weiblichen Studierenden
- M Menge aller männlichen Studierenden
- S Menge aller Studierenden, die im Unichor singen
- B Menge aller Studierenden, die Basketball spielen

Beispiel 1.34 (fort.)

Wir überlegen nun, wie die folgenden miteinander verknüpften Mengen beschrieben werden können.

$$\Omega \setminus I$$

Beispiel 1.34 (fort.)

Wir überlegen nun, wie die folgenden miteinander verknüpften Mengen beschrieben werden können.

$$\Omega \setminus I$$

Alle Studierenden, die nicht Ingenieurwissenschaften studieren

Beispiel 1.34 (fort.)

Wir überlegen nun, wie die folgenden miteinander verknüpften Mengen beschrieben werden können.

$$\Omega \setminus I$$

Alle Studierenden, die nicht Ingenieurwissenschaften studieren

$$I \cup S$$

Beispiel 1.34 (fort.)

Wir überlegen nun, wie die folgenden miteinander verknüpften Mengen beschrieben werden können.

$$\Omega \setminus I$$

Alle Studierenden, die nicht Ingenieurwissenschaften studieren

$$I \cup S$$

Alle Studierenden, die Ingenieurwissenschaften studieren oder im Unichor singen

Beispiel 1.34 (fort.)

Wir überlegen nun, wie die folgenden miteinander verknüpften Mengen beschrieben werden können.

$$\Omega \setminus I$$

Alle Studierenden, die nicht Ingenieurwissenschaften studieren

$$I \cup S$$

Alle Studierenden, die Ingenieurwissenschaften studieren oder im Unichor singen

$$M \cap B$$

Beispiel 1.34 (fort.)

Wir überlegen nun, wie die folgenden miteinander verknüpften Mengen beschrieben werden können.

$\Omega \setminus I$ Alle Studierenden, die nicht Ingenieurwissenschaften studieren

$I \cup S$ Alle Studierenden, die Ingenieurwissenschaften studieren oder im Unichor singen

$M \cap B$ Alle männlichen Studierenden, die Basketball spielen

Beispiel 1.34 (fort.)

Wir überlegen nun, wie die folgenden miteinander verknüpften Mengen beschrieben werden können.

$$\Omega \setminus I$$

Alle Studierenden, die nicht Ingenieurwissenschaften studieren

$$I \cup S$$

Alle Studierenden, die Ingenieurwissenschaften studieren oder im Unichor singen

$$M \cap B$$

Alle männlichen Studierenden, die Basketball spielen

$$I \setminus (B \cap S)$$

Beispiel 1.34 (fort.)

Wir überlegen nun, wie die folgenden miteinander verknüpften Mengen beschrieben werden können.

$$\Omega \setminus I$$

Alle Studierenden, die nicht Ingenieurwissenschaften studieren

$$I \cup S$$

Alle Studierenden, die Ingenieurwissenschaften studieren oder im Unichor singen

$$M \cap B$$

Alle männlichen Studierenden, die Basketball spielen

$$I \setminus (B \cap S)$$

Studierende der Ingenieurwissenschaften, die nicht sowohl Basketball spielen als auch im Chor singen

Beispiel 1.34 (fort.)

Wir überlegen nun, wie die folgenden miteinander verknüpften Mengen beschrieben werden können.

$\Omega \setminus I$ Alle Studierenden, die nicht Ingenieurwissenschaften studieren

$I \cup S$ Alle Studierenden, die Ingenieurwissenschaften studieren oder im Unichor singen

$M \cap B$ Alle männlichen Studierenden, die Basketball spielen

$I \setminus (B \cap S)$ Studierende der Ingenieurwissenschaften, die nicht sowohl Basketball spielen als auch im Chor singen

$(I \setminus B) \cup (I \setminus S)$

Beispiel 1.34 (fort.)

Wir überlegen nun, wie die folgenden miteinander verknüpften Mengen beschrieben werden können.

$\Omega \setminus I$ Alle Studierenden, die nicht Ingenieurwissenschaften studieren

$I \cup S$ Alle Studierenden, die Ingenieurwissenschaften studieren oder im Unichor singen

$M \cap B$ Alle männlichen Studierenden, die Basketball spielen

$I \setminus (B \cap S)$ Studierende der Ingenieurwissenschaften, die nicht sowohl Basketball spielen als auch im Chor singen

$(I \setminus B) \cup (I \setminus S)$ Studierende der Ingenieurwissenschaften, die nicht sowohl Basketball spielen als auch im Chor singen

Beispiel 1.34 (fort.)

Wir überlegen nun, wie die folgenden miteinander verknüpften Mengen beschrieben werden können.

$\Omega \setminus I$ Alle Studierenden, die nicht Ingenieurwissenschaften studieren

$I \cup S$ Alle Studierenden, die Ingenieurwissenschaften studieren oder im Unichor singen

$M \cap B$ Alle männlichen Studierenden, die Basketball spielen

$I \setminus (B \cap S)$ Studierende der Ingenieurwissenschaften, die nicht sowohl Basketball spielen als auch im Chor singen

$(I \setminus B) \cup (I \setminus S)$ Studierende der Ingenieurwissenschaften, die nicht sowohl Basketball spielen als auch im Chor singen

$\mathcal{C}(S) \cap (S \cup F)$

Beispiel 1.34 (fort.)

Wir überlegen nun, wie die folgenden miteinander verknüpften Mengen beschrieben werden können.

$\Omega \setminus I$	Alle Studierenden, die nicht Ingenieurwissenschaften studieren
$I \cup S$	Alle Studierenden, die Ingenieurwissenschaften studieren oder im Unichor singen
$M \cap B$	Alle männlichen Studierenden, die Basketball spielen
$I \setminus (B \cap S)$	Studierende der Ingenieurwissenschaften, die nicht sowohl Basketball spielen als auch im Chor singen
$(I \setminus B) \cup (I \setminus S)$	Studierende der Ingenieurwissenschaften, die nicht sowohl Basketball spielen als auch im Chor singen
$\mathcal{C}(S) \cap (S \cup F)$	Studentinnen, die nicht im Chor singen

Regeln für die Verknüpfung von Mengen

$$A \cup B = B \cup A$$

$$A \cap B = B \cap A$$

(Kommutativgesetz)

Regeln für die Verknüpfung von Mengen

$$A \cup B = B \cup A$$

$$A \cap B = B \cap A$$

(Kommutativgesetz)

$$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$$

$$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$$

(Assoziativgesetz)

Regeln für die Verknüpfung von Mengen

$$A \cup B = B \cup A$$

$$A \cap B = B \cap A$$

(Kommutativgesetz)

$$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$$

$$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$$

(Assoziativgesetz)

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

(Distributivgesetz)

Regeln für die Verknüpfung von Mengen

$A \cup B = B \cup A$	(Kommutativgesetz)
$A \cap B = B \cap A$	
$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$	(Assoziativgesetz)
$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$	
$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$	(Distributivgesetz)
$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$	
$\mathcal{C}(A \cup B) = \mathcal{C}(A) \cap \mathcal{C}(B)$	(Regel von De Morgan)
$\mathcal{C}(A \cap B) = \mathcal{C}(A) \cup \mathcal{C}(B)$	

Tabelle: Regeln für die Verknüpfung von Mengen

Definition 1.35

Seien A und B Mengen. Unter dem *Kreuzprodukt* $A \times B$ von A und B versteht man die Menge aller möglichen geordneten Paare (a, b) , wobei die erste Komponente aus A und die zweite Komponente aus B ist, d. h.

$$A \times B = \{(a, b) : a \in A, b \in B\}.$$

Beispiel 1.36

$$\{1, 2\} \times \{2, 3\} = \{(1, 2), (1, 3), (2, 2), (2, 3)\}$$

Bezeichnung 1.37 (Zahlenmengen)

natürliche Zahlen $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$

Bezeichnung 1.37 (Zahlenmengen)

natürliche Zahlen $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$

ganze Zahlen $\mathbb{Z} = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$

Bezeichnung 1.37 (Zahlenmengen)

natürliche Zahlen $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$

ganze Zahlen $\mathbb{Z} = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$

rationale Zahlen $\mathbb{Q} = \{\frac{m}{n} : m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}\}$

Da sich jeder Bruch als endliche oder periodische Dezimalzahl darstellen lässt (z. B. $\frac{1}{3} = 0.\bar{3}$), kann man die rationalen Zahlen auch angeben als

$\mathbb{Q} = \{x : x \text{ endliche oder periodische Dezimalzahl}\}.$

Bezeichnung 1.37 (Zahlenmengen)

natürliche Zahlen $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$

ganze Zahlen $\mathbb{Z} = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$

rationale Zahlen $\mathbb{Q} = \{\frac{m}{n} : m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}\}$

Da sich jeder Bruch als endliche oder periodische Dezimalzahl darstellen lässt (z. B. $\frac{1}{3} = 0.\bar{3}$), kann man die rationalen Zahlen auch angeben als

$\mathbb{Q} = \{x : x \text{ endliche oder periodische Dezimalzahl}\}$.

reelle Zahlen $\mathbb{R} = \{x : x \text{ endliche oder unendliche Dezimalzahl}\}$ *Zu den rationalen Zahlen kommen bei den reellen Zahlen die unendlichen, nichtperiodischen Dezimalzahlen dazu. Dies sind die irrationalen Zahlen wie z. B. $\pi \approx 3,142159$ (Kreiszahl), $\sqrt{2}$, $e \approx 2,718282$ (Eulersche Konstante), $\log_4 3$.*

Bezeichnung 1.37 (Zahlenmengen)

natürliche Zahlen $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$

ganze Zahlen $\mathbb{Z} = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$

rationale Zahlen $\mathbb{Q} = \{\frac{m}{n} : m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}\}$

Da sich jeder Bruch als endliche oder periodische Dezimalzahl darstellen lässt (z. B. $\frac{1}{3} = 0.\bar{3}$), kann man die rationalen Zahlen auch angeben als

$\mathbb{Q} = \{x : x \text{ endliche oder periodische Dezimalzahl}\}.$

reelle Zahlen $\mathbb{R} = \{x : x \text{ endliche oder unendliche Dezimalzahl}\}$ *Zu den rationalen Zahlen kommen bei den reellen Zahlen die unendlichen, nichtperiodischen Dezimalzahlen dazu. Dies sind die irrationalen Zahlen wie z. B. $\pi \approx 3,142159$ (Kreiszahl), $\sqrt{2}$, $e \approx 2,718282$ (Eulersche Konstante), $\log_4 3$.*

Vorzeichenbeschränkung *Um festzulegen, dass von einer Zahlenmenge nur die positiven bzw. negativen Elemente betrachtet werden sollen, kennzeichnet man dies mit einem tiefgestellten $+$ oder $-$. Die hochgestellte 0 kennzeichnet, dass die Null dabei eingeschlossen ist, z. B.*

$$\mathbb{Z}_+ = \{x \in \mathbb{Z} : x > 0\} = \mathbb{N}$$

$$\mathbb{R}_-^0 = \{x \in \mathbb{R} : x \leq 0\}$$

Definition 1.38 (Intervall)

Seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$. Die Menge aller reellen Zahlen zwischen a und b heißt (endliches) *Intervall*, a und b heißen Randpunkte des Intervalls. Dabei wird unterschieden, ob Randpunkte zum Intervall dazugehören oder nicht. Im einzelnen verwenden wir die folgenden Bezeichnungen.

$[a, b] = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\}$ abgeschlossenes Intervall von a bis b

$(a, b) = \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$ offenes Intervall von a bis b

$[a, b) = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x < b\}$ halboffenes Intervall von a bis b

$(a, b] = \{x \in \mathbb{R} : a < x \leq b\}$ halboffenes Intervall von a bis b

Die Länge der Intervalle beträgt jeweils $b - a$.

Auch gewisse unbeschränkte Mengen werden als *unendliche Intervalle* bezeichnet und mit Hilfe des Symbols ∞ gekennzeichnet.

$$[a, \infty) = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x\}$$

$$(a, \infty) = \{x \in \mathbb{R} : a < x\}$$

$$(-\infty, b] = \{x \in \mathbb{R} : x \leq b\}$$

$$(-\infty, b) = \{x \in \mathbb{R} : x < b\}$$

$$(-\infty, \infty) = \mathbb{R}$$

Merke: *Unendlich ∞ ist keine reelle Zahl und kann deshalb nicht in einem Intervall liegen.*

Rechengesetze (Addition)

Für reelle Zahlen $a, b, c \in \mathbb{R}$ gilt:

$$a + b = b + a$$

Kommutativität der Addition

Rechengesetze (Addition)

Für reelle Zahlen $a, b, c \in \mathbb{R}$ gilt:

$$a + b = b + a$$

Kommutativität der Addition

$$a + (b + c) = (a + b) + c$$

Assoziativität der Addition

Rechengesetze (Addition)

Für reelle Zahlen $a, b, c \in \mathbb{R}$ gilt:

$$a + b = b + a$$

Kommutativität der Addition

$$a + (b + c) = (a + b) + c$$

Assoziativität der Addition

$$a + 0 = a$$

neutrales Element der Addition

Rechengesetze (Addition)

Für reelle Zahlen $a, b, c \in \mathbb{R}$ gilt:

$$a + b = b + a$$

Kommutativität der Addition

$$a + (b + c) = (a + b) + c$$

Assoziativität der Addition

$$a + 0 = a$$

neutrales Element der Addition

$$a + (-a) = 0$$

inverses Element der Addition

Rechengesetze (Multiplikation)

Für reelle Zahlen $a, b, c \in \mathbb{R}$, $d \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ gilt:

$$a \cdot b = b \cdot a$$

Kommutativität der Multiplikation

Rechengesetze (Multiplikation)

Für reelle Zahlen $a, b, c \in \mathbb{R}$, $d \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ gilt:

$$a \cdot b = b \cdot a$$

Kommutativität der Multiplikation

$$a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$$

Assoziativität der Multiplikation

Rechengesetze (Multiplikation)

Für reelle Zahlen $a, b, c \in \mathbb{R}, d \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ gilt:

$$a \cdot b = b \cdot a$$

Kommutativität der Multiplikation

$$a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$$

Assoziativität der Multiplikation

$$a \cdot 1 = a$$

neutrales Element der Multiplikation

Rechengesetze (Multiplikation)

Für reelle Zahlen $a, b, c \in \mathbb{R}$, $d \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ gilt:

$$a \cdot b = b \cdot a$$

Kommutativität der Multiplikation

$$a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$$

Assoziativität der Multiplikation

$$a \cdot 1 = a$$

neutrales Element der Multiplikation

$$d \cdot \frac{1}{d} = 1$$

inverses Element der Multiplikation

Rechengesetze (Distributivitätsgesetze)

Für reelle Zahlen $a, b, c \in \mathbb{R}$ gilt:

$$a \cdot (b + c) = a b + a c$$

Rechengesetze (Distributivitätsgesetze)

Für reelle Zahlen $a, b, c \in \mathbb{R}$ gilt:

$$a \cdot (b + c) = a b + a c$$

$$(a + b) \cdot c = a c + b c$$

Für reelle Zahlen $a, b, c \in \mathbb{R}$ gilt:

$$(a + b)^2 = a^2 + 2 a b + b^2 \quad 1. \text{ binomische Formel}$$

Für reelle Zahlen $a, b, c \in \mathbb{R}$ gilt:

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

1. binomische Formel

$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

2. binomische Formel

Für reelle Zahlen $a, b, c \in \mathbb{R}$ gilt:

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

1. binomische Formel

$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

2. binomische Formel

$$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$$

3. binomische Formel

Ein *Bruch* ist das Ergebnis einer ganzzahligen Division:

$$m : n = \frac{m}{n}, \quad m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}$$

m heißt *Zähler*, n heißt *Nenner* des Bruchs. Brüche mit gleichem Nenner heißen *gleichnamig*.

Merke: *Der Nenner eines Bruches ist immer ungleich Null; teile nie durch Null!*

$$\frac{a}{b} = \frac{a \cdot c}{b \cdot c} \quad \forall c \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$$

Erweitern

Rechnen mit Brüchen

$$\frac{a}{b} = \frac{a \cdot c}{b \cdot c} \quad \forall c \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$$

$$\frac{a}{b} = \frac{a : c}{b : c} \quad \forall c \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$$

Erweitern

Kürzen

Rechnen mit Brüchen

$$\frac{a}{b} = \frac{a \cdot c}{b \cdot c} \quad \forall c \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$$

$$\frac{a}{b} = \frac{a : c}{b : c} \quad \forall c \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$$

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{b} = \frac{a + c}{b}$$

Erweitern

Kürzen

Addieren (gleichnamig)

$$\frac{a}{b} = \frac{a \cdot c}{b \cdot c} \quad \forall c \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$$

Erweitern

$$\frac{a}{b} = \frac{a : c}{b : c} \quad \forall c \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$$

Kürzen

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{b} = \frac{a + c}{b}$$

Addieren (gleichnamig)

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{a \cdot d}{b \cdot d} + \frac{c \cdot b}{d \cdot b} = \frac{a \cdot d + b \cdot c}{b \cdot d}$$

Addieren (Hauptnenner)

$$\frac{a}{b} = \frac{a \cdot c}{b \cdot c} \quad \forall c \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$$

Erweitern

$$\frac{a}{b} = \frac{a : c}{b : c} \quad \forall c \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$$

Kürzen

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{b} = \frac{a + c}{b}$$

Addieren (gleichnamig)

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{a \cdot d}{b \cdot d} + \frac{c \cdot b}{d \cdot b} = \frac{a \cdot d + b \cdot c}{b \cdot d}$$

Addieren (Hauptnenner)

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d}$$

Multiplizieren

$$\frac{a}{b} = \frac{a \cdot c}{b \cdot c} \quad \forall c \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$$

$$\frac{a}{b} = \frac{a : c}{b : c} \quad \forall c \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$$

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{b} = \frac{a + c}{b}$$

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{a \cdot d}{b \cdot d} + \frac{c \cdot b}{d \cdot b} = \frac{a \cdot d + b \cdot c}{b \cdot d}$$

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d}$$

$$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} = \frac{a \cdot d}{b \cdot c}$$

Erweitern

Kürzen

Addieren (gleichnamig)

Addieren (Hauptnenner)

Multiplizieren

Dividieren

Beispiel 1.39

$$\frac{1}{2} = \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 3} = \frac{3}{6}$$

Erweitern

Beispiel 1.39

$$\frac{1}{2} = \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 3} = \frac{3}{6}$$

Erweitern

$$\frac{3}{6} = \frac{3 : 3}{6 : 3} = \frac{1}{2}$$

Kürzen

Beispiel 1.39

$$\frac{1}{2} = \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 3} = \frac{3}{6}$$

$$\frac{3}{6} = \frac{3 : 3}{6 : 3} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{2} + \frac{3}{2} = \frac{1+3}{2} = \frac{4}{2} = 2$$

Erweitern

Kürzen

Addieren (gleichnamig)

Beispiel 1.39

$$\frac{1}{2} = \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 3} = \frac{3}{6}$$

Erweitern

$$\frac{3}{6} = \frac{3 : 3}{6 : 3} = \frac{1}{2}$$

Kürzen

$$\frac{1}{2} + \frac{3}{2} = \frac{1+3}{2} = \frac{4}{2} = 2$$

Addieren (gleichnamig)

$$\frac{1}{2} + \frac{2}{3} = \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 3} + \frac{2 \cdot 2}{3 \cdot 2} = \frac{3}{6} + \frac{4}{6} = \frac{7}{6}$$

Addieren (Hauptnenner)

Beispiel 1.39

$$\frac{1}{2} = \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 3} = \frac{3}{6}$$

$$\frac{3}{6} = \frac{3 : 3}{6 : 3} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{2} + \frac{3}{2} = \frac{1+3}{2} = \frac{4}{2} = 2$$

$$\frac{1}{2} + \frac{2}{3} = \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 3} + \frac{2 \cdot 2}{3 \cdot 2} = \frac{3}{6} + \frac{4}{6} = \frac{7}{6}$$

$$\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{2 \cdot 1}{3 \cdot 2} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

Erweitern

Kürzen

Addieren (gleichnamig)

Addieren (Hauptnenner)

Multiplizieren

Beispiel 1.39

$$\frac{1}{2} = \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 3} = \frac{3}{6}$$

$$\frac{3}{6} = \frac{3 : 3}{6 : 3} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{2} + \frac{3}{2} = \frac{1+3}{2} = \frac{4}{2} = 2$$

$$\frac{1}{2} + \frac{2}{3} = \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 3} + \frac{2 \cdot 2}{3 \cdot 2} = \frac{3}{6} + \frac{4}{6} = \frac{7}{6}$$

$$\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{2 \cdot 1}{3 \cdot 2} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

$$\frac{1}{1} : \frac{1}{2} = \frac{1}{1} \cdot \frac{2}{1} = 2$$

Erweitern

Kürzen

Addieren (gleichnamig)

Addieren (Hauptnenner)

Multiplizieren

Dividieren

Definition 1.40

Für $a \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$ ist

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{n \text{ Faktoren}}$$

die *n -te Potenz* von a . Dabei heißt a *Basis* und n *Exponent*.

Definition 1.40

Für $a \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$ ist

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{n \text{ Faktoren}}$$

die *n -te Potenz* von a . Dabei heißt a *Basis* und n *Exponent*.

Für $a \neq 0$ ist:

$$a^0 = 1, \quad a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

Definition 1.40

Für $a \in \mathbb{R}_+$ ist die *n -te Wurzel aus a*

$$a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$$

die eindeutig bestimmte *nichtnegative Zahl*, deren n -te Potenz a ergibt.

Definition 1.40

Für $a \in \mathbb{R}_+$ ist die *n -te Wurzel aus a*

$$a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$$

die eindeutig bestimmte *nichtnegative Zahl*, deren n -te Potenz a ergibt.

Für $a \in \mathbb{R}_+$, $n \in \mathbb{N}$, $m \in \mathbb{Z}$ ist

$$a^{\frac{m}{n}} = (a^m)^{\frac{1}{n}} = \left(a^{\frac{1}{n}}\right)^m = (\sqrt[n]{a})^m = \sqrt[n]{a^m}.$$

Beispiel 1.41

$$2^5 =$$

Beispiel 1.41

$$2^5 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 32$$

Beispiel 1.41

$$2^5 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 32$$

$$3^{-2} =$$

Beispiel 1.41

$$2^5 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 32$$

$$3^{-2} = \frac{1}{3^2} = \frac{1}{9}$$

Beispiel 1.41

$$2^5 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 32$$

$$3^{-2} = \frac{1}{3^2} = \frac{1}{9}$$

$$16^{\frac{1}{4}} =$$

Beispiel 1.41

$$2^5 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 32$$

$$3^{-2} = \frac{1}{3^2} = \frac{1}{9}$$

$$16^{\frac{1}{4}} = \sqrt[4]{16} = 2, \quad \text{da } 2^4 = 16$$

Beispiel 1.41

$$2^5 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 32$$

$$3^{-2} = \frac{1}{3^2} = \frac{1}{9}$$

$$16^{\frac{1}{4}} = \sqrt[4]{16} = 2, \quad \text{da } 2^4 = 16$$

$$4^{\frac{3}{2}} =$$

Beispiel 1.41

$$2^5 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 32$$

$$3^{-2} = \frac{1}{3^2} = \frac{1}{9}$$

$$16^{\frac{1}{4}} = \sqrt[4]{16} = 2, \quad \text{da } 2^4 = 16$$

$$4^{\frac{3}{2}} = \left(\sqrt{4}\right)^3 = \sqrt{4^3} = 8$$

Beispiel 1.42

Herr Huber legt bei seiner Bank einen Betrag von $K_0 \text{ €}$ mit einer Zinsrate von $p\%$ jährlich an. Die Zinsen werden jeweils am Jahresende gutgeschrieben und dem Anlagebetrag zugeschlagen.

Beispiel 1.42

Herr Huber legt bei seiner Bank einen Betrag von $K_0 \in$ mit einer Zinsrate von $p\%$ jährlich an. Die Zinsen werden jeweils am Jahresende gutgeschrieben und dem Anlagebetrag zugeschlagen.

Sein Guthaben beträgt nach

$$\text{einem Jahr: } K_1 = K_0 + K_0 \cdot \frac{p}{100} = K_0 \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right)$$

Beispiel 1.42

Herr Huber legt bei seiner Bank einen Betrag von $K_0 \in$ mit einer Zinsrate von $p\%$ jährlich an. Die Zinsen werden jeweils am Jahresende gutgeschrieben und dem Anlagebetrag zugeschlagen.

Sein Guthaben beträgt nach

$$\text{einem Jahr: } K_1 = K_0 + K_0 \cdot \frac{p}{100} = K_0 \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right)$$

$$\text{zwei Jahren: } K_2 = K_1 + K_1 \cdot \frac{p}{100} = K_0 \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right)^2$$

Beispiel 1.42

Herr Huber legt bei seiner Bank einen Betrag von $K_0 \in$ mit einer Zinsrate von $p\%$ jährlich an. Die Zinsen werden jeweils am Jahresende gutgeschrieben und dem Anlagebetrag zugeschlagen.

Sein Guthaben beträgt nach

$$\text{einem Jahr: } K_1 = K_0 + K_0 \cdot \frac{p}{100} = K_0 \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right)$$

$$\text{zwei Jahren: } K_2 = K_1 + K_1 \cdot \frac{p}{100} = K_0 \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right)^2$$

...

$$n \text{ Jahren: } K_n = K_{n-1} + K_{n-1} \cdot \frac{p}{100} = K_0 \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right)^n$$

Dies ist die *Zinseszinsformel*.

Rechenregeln für Potenzen

Für $a, b \in \mathbb{R}_+$ und $r, s \in \mathbb{Q}$ gilt:

Grundlagen

Aussagenlogik

Mengenlehre

Zahlenmengen und
Rechenregeln

Potenzen und Logarithmen

Trigonometrie

Notation, Abkürzungen und
co.

Gleichungen

Ungleichungen

Funktionen

Folgen und Reihen

Grenzwerte und
Stetigkeit

Rechenregeln für Potenzen

Für $a, b \in \mathbb{R}_+$ und $r, s \in \mathbb{Q}$ gilt:

$$\blacktriangleright \quad a^r \cdot a^s = a^{r+s}$$

Grundlagen

Aussagenlogik

Mengenlehre

Zahlenmengen und
Rechenregeln

Potenzen und Logarithmen

Trigonometrie

Notation, Abkürzungen und
co.

Gleichungen

Ungleichungen

Funktionen

Folgen und Reihen

Grenzwerte und
Stetigkeit

Rechenregeln für Potenzen

Für $a, b \in \mathbb{R}_+$ und $r, s \in \mathbb{Q}$ gilt:

- ▶ $a^r \cdot a^s = a^{r+s}$
- ▶ $a^r \cdot b^r = (a \cdot b)^r$

Grundlagen

Aussagenlogik

Mengenlehre

Zahlenmengen und
Rechenregeln

Potenzen und Logarithmen

Trigonometrie

Notation, Abkürzungen und
co.

Gleichungen

Ungleichungen

Funktionen

Folgen und Reihen

Grenzwerte und
Stetigkeit

Rechenregeln für Potenzen

Für $a, b \in \mathbb{R}_+$ und $r, s \in \mathbb{Q}$ gilt:

- ▶ $a^r \cdot a^s = a^{r+s}$
- ▶ $a^r \cdot b^r = (a \cdot b)^r$
- ▶ $(a^r)^s = a^{r \cdot s} = (a^s)^r$

Rechenregeln für Potenzen

Für $a, b \in \mathbb{R}_+$ und $r, s \in \mathbb{Q}$ gilt:

- ▶ $a^r \cdot a^s = a^{r+s}$
- ▶ $a^r \cdot b^r = (a \cdot b)^r$
- ▶ $(a^r)^s = a^{r \cdot s} = (a^s)^r$
- ▶ $\frac{a^r}{a^s} = a^{r-s}$

Rechenregeln für Potenzen

Für $a, b \in \mathbb{R}_+$ und $r, s \in \mathbb{Q}$ gilt:

- ▶ $a^r \cdot a^s = a^{r+s}$
- ▶ $a^r \cdot b^r = (a \cdot b)^r$
- ▶ $(a^r)^s = a^{r \cdot s} = (a^s)^r$
- ▶ $\frac{a^r}{a^s} = a^{r-s}$
- ▶ $\left(\frac{a}{b}\right)^r = \frac{a^r}{b^r} = a^r \cdot b^{-r}$

Rechenregeln für Potenzen

Für $a, b \in \mathbb{R}_+$ und $r, s \in \mathbb{Q}$ gilt:

- ▶ $a^r \cdot a^s = a^{r+s}$
- ▶ $a^r \cdot b^r = (a \cdot b)^r$
- ▶ $(a^r)^s = a^{r \cdot s} = (a^s)^r$
- ▶ $\frac{a^r}{a^s} = a^{r-s}$
- ▶ $\left(\frac{a}{b}\right)^r = \frac{a^r}{b^r} = a^r \cdot b^{-r}$
- ▶ $a^{b^r} = a^{(b^r)}$

Beispiel 1.43

$$4^{3^2} = 4^{(3^2)} =$$

Beispiel 1.43

$$4^{3^2} = 4^{(3^2)} = 4^{3 \cdot 3} = 4^9 \quad \text{aber} \quad (4^3)^2 = (4 \cdot 4 \cdot 4)^2 = 4^{3 \cdot 2} = 4^6$$

Beispiel 1.43

$$4^{3^2} = 4^{(3^2)} = 4^{3 \cdot 3} = 4^9 \quad \text{aber} \quad (4^3)^2 = (4 \cdot 4 \cdot 4)^2 = 4^{3 \cdot 2} = 4^6$$

$$(27x^{3p}y^{6q}z^{12r})^{\frac{1}{3}} =$$

Beispiel 1.43

$$4^{3^2} = 4^{(3^2)} = 4^{3 \cdot 3} = 4^9 \quad \text{aber} \quad (4^3)^2 = (4 \cdot 4 \cdot 4)^2 = 4^{3 \cdot 2} = 4^6$$

$$(27x^{3p}y^{6q}z^{12r})^{\frac{1}{3}} = 3x^py^{2q}z^{4r}$$

Beispiel 1.43

$$4^{3^2} = 4^{(3^2)} = 4^{3 \cdot 3} = 4^9 \quad \text{aber} \quad (4^3)^2 = (4 \cdot 4 \cdot 4)^2 = 4^{3 \cdot 2} = 4^6$$

$$(27x^{3p}y^{6q}z^{12r})^{\frac{1}{3}} = 3x^py^{2q}z^{4r}$$

$$\frac{\sqrt[5]{a^2} \cdot \sqrt[3]{b^9}}{\sqrt[10]{a} \cdot b^2} =$$

Beispiel 1.43

$$4^{3^2} = 4^{(3^2)} = 4^{3 \cdot 3} = 4^9 \quad \text{aber} \quad (4^3)^2 = (4 \cdot 4 \cdot 4)^2 = 4^{3 \cdot 2} = 4^6$$

$$(27x^{3p}y^{6q}z^{12r})^{\frac{1}{3}} = 3x^py^{2q}z^{4r}$$

$$\frac{\sqrt[5]{a^2} \cdot \sqrt[3]{b^9}}{\sqrt[10]{a} \cdot b^2} = a^{\frac{3}{10}} b$$

Beispiel 1.43

$$4^{3^2} = 4^{(3^2)} = 4^{3 \cdot 3} = 4^9 \quad \text{aber} \quad (4^3)^2 = (4 \cdot 4 \cdot 4)^2 = 4^{3 \cdot 2} = 4^6$$

$$(27x^{3p}y^{6q}z^{12r})^{\frac{1}{3}} = 3x^py^{2q}z^{4r}$$

$$\frac{\sqrt[5]{a^2} \cdot \sqrt[3]{b^9}}{\sqrt[10]{a} \cdot b^2} = a^{\frac{3}{10}} b$$

$$\frac{[(3a)^{-1}]^{-2} (2a^{-2})^{-1}}{a^{-3}} =$$

Beispiel 1.43

$$4^{3^2} = 4^{(3^2)} = 4^{3 \cdot 3} = 4^9 \quad \text{aber} \quad (4^3)^2 = (4 \cdot 4 \cdot 4)^2 = 4^{3 \cdot 2} = 4^6$$

$$(27x^{3p}y^{6q}z^{12r})^{\frac{1}{3}} = 3x^py^{2q}z^{4r}$$

$$\frac{\sqrt[5]{a^2} \cdot \sqrt[3]{b^9}}{\sqrt[10]{a} \cdot b^2} = a^{\frac{3}{10}} b$$

$$\frac{[(3a)^{-1}]^{-2} (2a^{-2})^{-1}}{a^{-3}} = \frac{9}{2} \cdot a^7$$

Beispiel 1.43

$$4^{3^2} = 4^{(3^2)} = 4^{3 \cdot 3} = 4^9 \quad \text{aber} \quad (4^3)^2 = (4 \cdot 4 \cdot 4)^2 = 4^{3 \cdot 2} = 4^6$$

$$(27x^{3p}y^{6q}z^{12r})^{\frac{1}{3}} = 3x^py^{2q}z^{4r}$$

$$\frac{\sqrt[5]{a^2} \cdot \sqrt[3]{b^9}}{\sqrt[10]{a} \cdot b^2} = a^{\frac{3}{10}} b$$

$$\frac{[(3a)^{-1}]^{-2}(2a^{-2})^{-1}}{a^{-3}} = \frac{9}{2} \cdot a^7$$

$$\left[\left(x^{\frac{1}{2}} \right)^{\frac{2}{3}} \right]^{\frac{2}{7}} =$$

Beispiel 1.43

$$4^{3^2} = 4^{(3^2)} = 4^{3 \cdot 3} = 4^9 \quad \text{aber} \quad (4^3)^2 = (4 \cdot 4 \cdot 4)^2 = 4^{3 \cdot 2} = 4^6$$

$$(27x^{3p}y^{6q}z^{12r})^{\frac{1}{3}} = 3x^py^{2q}z^{4r}$$

$$\frac{\sqrt[5]{a^2} \cdot \sqrt[3]{b^9}}{\sqrt[10]{a} \cdot b^2} = a^{\frac{3}{10}} b$$

$$\frac{[(3a)^{-1}]^{-2}(2a^{-2})^{-1}}{a^{-3}} = \frac{9}{2} \cdot a^7$$

$$\left[\left(x^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{2}{3}}\right]^{\frac{2}{7}} = x^{\frac{2}{21}} = \sqrt[21]{x^2}$$

Beispiel 1.44

Treten Summen von Quadratwurzeln im Nenner eines Bruchs auf, so kann man den Nenner mit Hilfe der 3. binomischen Formel rational machen:

$$\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3} + \sqrt{13}}$$

Beispiel 1.44

Treten Summen von Quadratwurzeln im Nenner eines Bruchs auf, so kann man den Nenner mit Hilfe der 3. binomischen Formel rational machen:

$$\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3} + \sqrt{13}} =$$

Beispiel 1.44

Treten Summen von Quadratwurzeln im Nenner eines Bruchs auf, so kann man den Nenner mit Hilfe der 3. binomischen Formel rational machen:

$$\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3} + \sqrt{13}} = \frac{\sqrt{2}(\sqrt{3} - \sqrt{13})}{(\sqrt{3} + \sqrt{13})(\sqrt{3} - \sqrt{13})} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{26}}{3 - 13} = \frac{\sqrt{26} - \sqrt{6}}{10}$$

Definition 1.45

Seien $a \in \mathbb{R}_+ \setminus \{1\}$ (d. h. positiv und ungleich 1) und $x \in \mathbb{R}_+$. Dann ist $\log_a x$ der *Logarithmus von x zur Basis a* derjenige Exponent, mit dem a potenziert werden muss, um x zu erhalten:

$$\log_a x = z \iff a^z = x.$$

Definition 1.45

Seien $a \in \mathbb{R}_+ \setminus \{1\}$ (d. h. positiv und ungleich 1) und $x \in \mathbb{R}_+$. Dann ist $\log_a x$ der *Logarithmus von x zur Basis a* derjenige Exponent, mit dem a potenziert werden muss, um x zu erhalten:

$$\log_a x = z \iff a^z = x.$$

Für Logarithmen zur Basis 10 verwendet man statt $\log_{10} x$ auch abkürzend die Schreibweise $\lg x$, für Logarithmen zur Basis $e \approx 2,71828182$, den *natürlichen Logarithmus*, schreibt man statt $\log_e x$ auch $\ln x$.

$$\log_2 8 =$$

Grundlagen

Aussagenlogik

Mengenlehre

Zahlenmengen und
Rechenregeln

Potenzen und Logarithmen

Trigonometrie

Notation, Abkürzungen und
co.

Gleichungen

Ungleichungen

Funktionen

Folgen und Reihen

Grenzwerte und
Stetigkeit

$$\log_2 8 = 3, \quad \text{denn } 2^3 = 8$$

$$\log_2 8 = 3, \quad \text{denn } 2^3 = 8$$

$$\lg 100 =$$

$$\log_2 8 = 3, \quad \text{denn } 2^3 = 8$$

$$\lg 100 = 2, \quad \text{denn } 10^2 = 100$$

Beispiel 1.46

$$\log_2 8 = 3, \quad \text{denn } 2^3 = 8$$

$$\lg 100 = 2, \quad \text{denn } 10^2 = 100$$

$$\log_9 3 =$$

$$\log_2 8 = 3, \quad \text{denn } 2^3 = 8$$

$$\lg 100 = 2, \quad \text{denn } 10^2 = 100$$

$$\log_9 3 = \frac{1}{2}, \quad \text{denn } 9^{\frac{1}{2}} = \sqrt{9} = 3$$

$$\log_2 8 = 3, \quad \text{denn } 2^3 = 8$$

$$\lg 100 = 2, \quad \text{denn } 10^2 = 100$$

$$\log_9 3 = \frac{1}{2}, \quad \text{denn } 9^{\frac{1}{2}} = \sqrt{9} = 3$$

$$\log_{\frac{1}{3}} 9 =$$

$$\log_2 8 = 3, \quad \text{denn } 2^3 = 8$$

$$\lg 100 = 2, \quad \text{denn } 10^2 = 100$$

$$\log_9 3 = \frac{1}{2}, \quad \text{denn } 9^{\frac{1}{2}} = \sqrt{9} = 3$$

$$\log_{\frac{1}{3}} 9 = -2, \quad \text{denn } \left(\frac{1}{3}\right)^{-2} = 3^2 = 9$$

$$\log_2 8 = 3, \quad \text{denn } 2^3 = 8$$

$$\lg 100 = 2, \quad \text{denn } 10^2 = 100$$

$$\log_9 3 = \frac{1}{2}, \quad \text{denn } 9^{\frac{1}{2}} = \sqrt{9} = 3$$

$$\log_{\frac{1}{3}} 9 = -2, \quad \text{denn } \left(\frac{1}{3}\right)^{-2} = 3^2 = 9$$

$$\log_2 1024 =$$

$$\log_2 8 = 3, \quad \text{denn } 2^3 = 8$$

$$\lg 100 = 2, \quad \text{denn } 10^2 = 100$$

$$\log_9 3 = \frac{1}{2}, \quad \text{denn } 9^{\frac{1}{2}} = \sqrt{9} = 3$$

$$\log_{\frac{1}{3}} 9 = -2, \quad \text{denn } \left(\frac{1}{3}\right)^{-2} = 3^2 = 9$$

$$\log_2 1024 = 10, \quad \text{denn } 2^{10} = 1024$$

$$\log_2 8 = 3, \quad \text{denn } 2^3 = 8$$

$$\lg 100 = 2, \quad \text{denn } 10^2 = 100$$

$$\log_9 3 = \frac{1}{2}, \quad \text{denn } 9^{\frac{1}{2}} = \sqrt{9} = 3$$

$$\log_{\frac{1}{3}} 9 = -2, \quad \text{denn } \left(\frac{1}{3}\right)^{-2} = 3^2 = 9$$

$$\log_2 1024 = 10, \quad \text{denn } 2^{10} = 1024$$

$$\log_a 1 =$$

$$\log_2 8 = 3, \quad \text{denn } 2^3 = 8$$

$$\lg 100 = 2, \quad \text{denn } 10^2 = 100$$

$$\log_9 3 = \frac{1}{2}, \quad \text{denn } 9^{\frac{1}{2}} = \sqrt{9} = 3$$

$$\log_{\frac{1}{3}} 9 = -2, \quad \text{denn } \left(\frac{1}{3}\right)^{-2} = 3^2 = 9$$

$$\log_2 1024 = 10, \quad \text{denn } 2^{10} = 1024$$

$$\log_a 1 = 0, \quad \text{denn } a^0 = 1 \quad \forall a \in \mathbb{R}_+ \setminus \{1\}$$

$$\log_2 8 = 3, \quad \text{denn } 2^3 = 8$$

$$\lg 100 = 2, \quad \text{denn } 10^2 = 100$$

$$\log_9 3 = \frac{1}{2}, \quad \text{denn } 9^{\frac{1}{2}} = \sqrt{9} = 3$$

$$\log_{\frac{1}{3}} 9 = -2, \quad \text{denn } \left(\frac{1}{3}\right)^{-2} = 3^2 = 9$$

$$\log_2 1024 = 10, \quad \text{denn } 2^{10} = 1024$$

$$\log_a 1 = 0, \quad \text{denn } a^0 = 1 \quad \forall a \in \mathbb{R}_+ \setminus \{1\}$$

$$\log_a a =$$

$$\log_2 8 = 3, \quad \text{denn } 2^3 = 8$$

$$\lg 100 = 2, \quad \text{denn } 10^2 = 100$$

$$\log_9 3 = \frac{1}{2}, \quad \text{denn } 9^{\frac{1}{2}} = \sqrt{9} = 3$$

$$\log_{\frac{1}{3}} 9 = -2, \quad \text{denn } \left(\frac{1}{3}\right)^{-2} = 3^2 = 9$$

$$\log_2 1024 = 10, \quad \text{denn } 2^{10} = 1024$$

$$\log_a 1 = 0, \quad \text{denn } a^0 = 1 \quad \forall a \in \mathbb{R}_+ \setminus \{1\}$$

$$\log_a a = 1, \quad \text{denn } a^1 = a \quad \forall a \in \mathbb{R}_+ \setminus \{1\}$$

Für $a \in \mathbb{R}_+ \setminus \{1\}$, $x, y \in \mathbb{R}_+$ und $p \in \mathbb{R}$ gilt:

Für $a \in \mathbb{R}_+ \setminus \{1\}$, $x, y \in \mathbb{R}_+$ und $p \in \mathbb{R}$ gilt:

► $a^{\log_a x} = x$

Für $a \in \mathbb{R}_+ \setminus \{1\}$, $x, y \in \mathbb{R}_+$ und $p \in \mathbb{R}$ gilt:

► $a^{\log_a x} = x$

► $\log_a (a^x) = x$

Für $a \in \mathbb{R}_+ \setminus \{1\}$, $x, y \in \mathbb{R}_+$ und $p \in \mathbb{R}$ gilt:

- ▶ $a^{\log_a x} = x$
- ▶ $\log_a (a^x) = x$
- ▶ $\log_a (xy) = \log_a x + \log_a y$

Für $a \in \mathbb{R}_+ \setminus \{1\}$, $x, y \in \mathbb{R}_+$ und $p \in \mathbb{R}$ gilt:

- ▶ $a^{\log_a x} = x$
- ▶ $\log_a (a^x) = x$
- ▶ $\log_a (xy) = \log_a x + \log_a y$
- ▶ $\log_a \left(\frac{x}{y}\right) = \log_a x - \log_a y$

Für $a \in \mathbb{R}_+ \setminus \{1\}$, $x, y \in \mathbb{R}_+$ und $p \in \mathbb{R}$ gilt:

- ▶ $a^{\log_a x} = x$
- ▶ $\log_a (a^x) = x$
- ▶ $\log_a (xy) = \log_a x + \log_a y$
- ▶ $\log_a \left(\frac{x}{y}\right) = \log_a x - \log_a y$
- ▶ $\log_a x^p = p \log_a x$

Für $a \in \mathbb{R}_+ \setminus \{1\}$, $x, y \in \mathbb{R}_+$ und $p \in \mathbb{R}$ gilt:

► $a^{\log_a x} = x$

► $\log_a (a^x) = x$

► $\log_a (xy) = \log_a x + \log_a y$

► $\log_a \left(\frac{x}{y} \right) = \log_a x - \log_a y$

► $\log_a x^p = p \log_a x$

► $\log_a x = \log_a b \cdot \log_b x$ bzw. $\log_b x = \frac{\log_a x}{\log_a b}$

Für $a \in \mathbb{R}_+ \setminus \{1\}$, $x, y \in \mathbb{R}_+$ und $p \in \mathbb{R}$ gilt:

- ▶ $a^{\log_a x} = x$
- ▶ $\log_a (a^x) = x$
- ▶ $\log_a (xy) = \log_a x + \log_a y$
- ▶ $\log_a \left(\frac{x}{y}\right) = \log_a x - \log_a y$
- ▶ $\log_a x^p = p \log_a x$
- ▶ $\log_a x = \log_a b \cdot \log_b x$ bzw. $\log_b x = \frac{\log_a x}{\log_a b}$

Die ersten beiden Regeln bedeuten, dass das Logarithmieren die Anwendung der entsprechenden Exponentialfunktion „rückgängig macht“. Die letzte Regel verwendet man insbesondere zur Umrechnung in andere Basen.

Beispiel 1.47

Für $x > 0$ gilt

$$\log_2(8x^2) =$$

Beispiel 1.47

Für $x > 0$ gilt

$$\log_2(8x^2) = \log_2 8 + \log_2 x^2 = 3 + 2 \log_2 x$$

Beispiel 1.47

Für $x > 0$ gilt

$$\log_2(8x^2) = \log_2 8 + \log_2 x^2 = 3 + 2 \log_2 x$$

$$\lg\left(\frac{100}{x^5}\right) =$$

Beispiel 1.47

Für $x > 0$ gilt

$$\log_2(8x^2) = \log_2 8 + \log_2 x^2 = 3 + 2 \log_2 x$$

$$\lg\left(\frac{100}{x^5}\right) = \lg 100 - \lg x^5 = 2 - 5 \lg x$$

Beispiel 1.47

Für $x > 0$ gilt

$$\log_2(8x^2) = \log_2 8 + \log_2 x^2 = 3 + 2 \log_2 x$$

$$\lg\left(\frac{100}{x^5}\right) = \lg 100 - \lg x^5 = 2 - 5 \lg x$$

Umrechnen in eine andere Basis:

$$\log_2 100 =$$

Beispiel 1.47

Für $x > 0$ gilt

$$\log_2(8x^2) = \log_2 8 + \log_2 x^2 = 3 + 2 \log_2 x$$

$$\lg\left(\frac{100}{x^5}\right) = \lg 100 - \lg x^5 = 2 - 5 \lg x$$

Umrechnen in eine andere Basis:

$$\log_2 100 = \frac{\lg 100}{\lg 2} = \frac{2}{\lg 2}$$

Beispiel 1.48

Der radioaktive Zerfall ist ein exponentieller Prozess, d. h. es gilt:

$A(t) = A_0 e^{-\lambda t}$, wobei λ die sog. Zerfallskonstante (Einheit pro Zeit) ist, die von der Halbwertszeit $T_{1/2}$ abhängt.

Beispiel 1.48

Der radioaktive Zerfall ist ein exponentieller Prozess, d. h. es gilt:

$A(t) = A_0 e^{-\lambda t}$, wobei λ die sog. Zerfallskonstante (Einheit pro Zeit) ist, die von der Halbwertszeit $T_{1/2}$ abhängt.

$$\begin{aligned} A_0 e^{-\lambda T_{1/2}} &= \frac{1}{2} A_0 \\ \Leftrightarrow e^{-\lambda T_{1/2}} &= \frac{1}{2} \\ \Leftrightarrow -\lambda T_{1/2} &= \ln \frac{1}{2} \\ \Leftrightarrow \lambda &= \frac{\ln 1 - \ln 2}{-T_{1/2}} = \frac{\ln 2}{T_{1/2}} \end{aligned}$$

Für das häufigste natürlich vorkommende Uran Isotop ist ^{238}U , mit einer Halbwertszeit von $T_{1/2} = 4,468 \cdot 10^9 \text{ a}$ (Jahre) $\approx 1,409 \cdot 10^{17} \text{ s}$ ergibt sich so eine Zerfallskonstante $\lambda \approx 4,919 \cdot 10^{-18} \frac{1}{\text{s}}$.

Definition 1.49

Unter dem *Betrag* einer reellen Zahl a versteht man geometrisch den Abstand von a zum Ursprung auf der reellen Zahlengeraden, d. h.

$$|a| = \begin{cases} a & \text{falls } a \geq 0 \\ -a & \text{falls } a < 0 \end{cases}$$

Beispiel 1.50

$$|4| = 4$$

$$|-5| = 5$$

$$|0| = 0$$

Beispiel 1.50

$$|4| = 4$$

$$|-5| = 5$$

$$|0| = 0$$

$$|x - 2| = \begin{cases} x - 2 & \text{falls } x - 2 \geq 0 \\ -(x - 2) & \text{falls } x - 2 < 0 \end{cases}$$

Beispiel 1.50

$$|4| = 4$$

$$|-5| = 5$$

$$|0| = 0$$

$$|x - 2| = \begin{cases} x - 2 & \text{falls } x - 2 \geq 0 \\ -(x - 2) & \text{falls } x - 2 < 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow |x - 2| = \begin{cases} x - 2 & \text{falls } x \geq 2 \\ 2 - x & \text{falls } x < 2 \end{cases}$$

Sind x_1 und x_2 zwei beliebige reelle Zahlen, so ist der Abstand von x_1 und x_2 auf der Zahlengeraden

Sind x_1 und x_2 zwei beliebige reelle Zahlen, so ist der Abstand von x_1 und x_2 auf der Zahlengeraden

$$x_1 - x_2 \quad \text{falls } x_1 \geq x_2, \text{ d. h. } x_1 - x_2 \geq 0$$

$$x_2 - x_1 \quad \text{falls } x_2 > x_1, \text{ d. h. } x_1 - x_2 < 0.$$

Sind x_1 und x_2 zwei beliebige reelle Zahlen, so ist der Abstand von x_1 und x_2 auf der Zahlengeraden

$$x_1 - x_2 \quad \text{falls } x_1 \geq x_2, \text{ d. h. } x_1 - x_2 \geq 0$$

$$x_2 - x_1 \quad \text{falls } x_2 > x_1, \text{ d. h. } x_1 - x_2 < 0.$$

Somit gibt

$$|x_2 - x_1| = |x_1 - x_2| = \begin{cases} x_1 - x_2 & \text{falls } x_1 \geq x_2 \\ -(x_1 - x_2) & \text{falls } x_1 < x_2 \end{cases}$$

den Abstand zwischen x_1 und x_2 auf der Zahlengeraden an.

Beispiel 1.51

- Abstand zwischen 2 und 8: $|2 - 8| = |-6| = 6$

Beispiel 1.51

- ▶ Abstand zwischen 2 und 8: $|2 - 8| = |-6| = 6$
- ▶ Abstand zwischen -5 und 10: $|-5 - 10| = |-15| = 15$

Beispiel 1.51

- ▶ Abstand zwischen 2 und 8: $|2 - 8| = |-6| = 6$
- ▶ Abstand zwischen -5 und 10: $|-5 - 10| = |-15| = 15$
- ▶ Abstand zwischen -7 und -3 : $|-7 - (-3)| = |-4| = 4$

Trigonometrie

Die Trigonometrie ist die Untersuchung der Seitenverhältnisse und Winkelgrößen in Dreiecken. So kann man zum Beispiel aus den drei Seitenlängen die Winkel und aus den drei Winkeln das Verhältnis der Seitenlängen zu einander bestimmen.

Trigonometrie

Die Trigonometrie ist die Untersuchung der Seitenverhältnisse und Winkelgrößen in Dreiecken. So kann man zum Beispiel aus den drei Seitenlängen die Winkel und aus den drei Winkeln das Verhältnis der Seitenlängen zu einander bestimmen.

Definition 1.52

Zwei geometrische Figuren (z. B. Dreiecke), die deckungsgleich sind (d. h. durch Verschiebungen und Drehungen zur Deckung gebracht werden können), heißen *kongruent*.

Zwei Figuren heißen *ähnlich*, wenn sie durch Verschiebungen, Drehungen und Skalierung zur Deckung gebracht werden können.

Trigonometrie

Die Trigonometrie ist die Untersuchung der Seitenverhältnisse und Winkelgrößen in Dreiecken. So kann man zum Beispiel aus den drei Seitenlängen die Winkel und aus den drei Winkeln das Verhältnis der Seitenlängen zu einander bestimmen.

Definition 1.52

Zwei geometrische Figuren (z. B. Dreiecke), die deckungsgleich sind (d. h. durch Verschiebungen und Drehungen zur Deckung gebracht werden können), heißen *kongruent*.

Zwei Figuren heißen *ähnlich*, wenn sie durch Verschiebungen, Drehungen und Skalierung zur Deckung gebracht werden können.

Folgerung 1.53

Zwei Dreiecke, die gleiche Seitenlängen besitzen, sind folglich kongruent. Sind die Winkel in zwei Dreiecken gleich groß, so sind die Dreiecke ähnlich.

Winkel können im Bogenmaß $\omega \in [0, 2\pi)$ oder im Gradmaß $\alpha \in [0^\circ, 360^\circ)$ angegeben werden. Wobei 2π bzw. 360° den Vollkreis beschreiben. Der Wert des Bogenmaßes entspricht der Länge der Kreislinie eines Sektors des Winkels im Einheitskreis.

Winkel können im Bogenmaß $\omega \in [0, 2\pi)$ oder im Gradmaß $\alpha \in [0^\circ, 360^\circ)$ angegeben werden. Wobei 2π bzw. 360° den Vollkreis beschreiben. Der Wert des Bogenmaßes entspricht der Länge der Kreislinie eines Sektors des Winkels im Einheitskreis.

	1. Quadrant					2. Quadrant			
Gradmaß	0°	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°	
Bogenmaß	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	
	3. Quadrant					4. Quadrant			
Gradmaß	180°	210°	225°	240°	270°	300°	315°	330°	360°
Bogenmaß	π	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{7\pi}{4}$	$\frac{11\pi}{6}$	2π

Die Seitenverhältnisse im rechtwinkligen Dreieck hängen nur vom Winkel α ab.

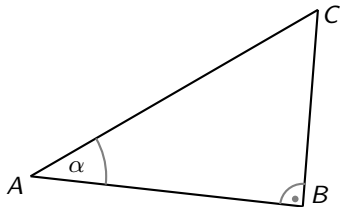


Abbildung: Strahlensatz am rechtwinkligen Dreieck

Die Seitenverhältnisse im rechtwinkligen Dreieck hängen nur vom Winkel α ab.

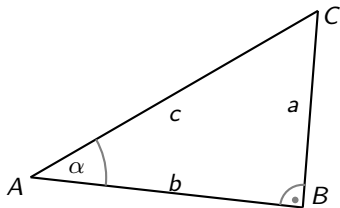


Abbildung: Strahlensatz am rechtwinkligen Dreieck

Die Seitenverhältnisse im rechtwinkligen Dreieck hängen nur vom Winkel α ab.

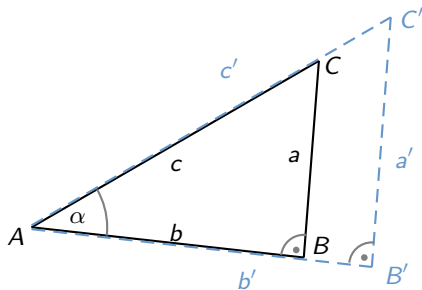


Abbildung: Strahlensatz am rechtwinkligen Dreieck

Die Seitenverhältnisse im rechtwinkligen Dreieck hängen nur vom Winkel α ab.

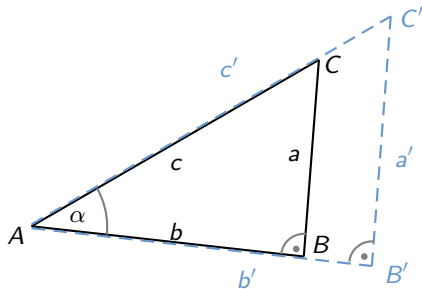


Abbildung: Strahlensatz am rechtwinkligen Dreieck

Da die Strecken a und a' parallel sind, gilt nach dem Strahlensatz:

$$\frac{b}{c} = \frac{b'}{c'} = \frac{\text{Ankathete}}{\text{Hypotenuse}}$$

$$\frac{a}{c} = \frac{a'}{c'} = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Hypotenuse}}$$

$$\frac{a}{b} = \frac{a'}{b'} = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Ankathete}}$$

Die *trigonometrischen Funktionen* beschreiben den Zusammenhang zwischen der Größe eines Winkels im rechtwinkligen Dreieck und dem Verhältnis der Seitenlängen:

$$\sin \alpha = \frac{a}{c} = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Hypothenuse}}$$

Die *trigonometrischen Funktionen* beschreiben den Zusammenhang zwischen der Größe eines Winkels im rechtwinkligen Dreieck und dem Verhältnis der Seitenlängen:

$$\sin \alpha = \frac{a}{c} = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Hypotenuse}}$$

$$\cos \alpha = \frac{b}{c} = \frac{\text{Ankathete}}{\text{Hypotenuse}}$$

Die *trigonometrischen Funktionen* beschreiben den Zusammenhang zwischen der Größe eines Winkels im rechtwinkligen Dreieck und dem Verhältnis der Seitenlängen:

$$\sin \alpha = \frac{a}{c} = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Hypotenuse}}$$

$$\cos \alpha = \frac{b}{c} = \frac{\text{Ankathete}}{\text{Hypotenuse}}$$

$$\tan \alpha = \frac{a}{b} = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Ankathete}} = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$$

Die *trigonometrischen Funktionen* beschreiben den Zusammenhang zwischen der Größe eines Winkels im rechtwinkligen Dreieck und dem Verhältnis der Seitenlängen:

$$\sin \alpha = \frac{a}{c} = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Hypotenuse}}$$

$$\cos \alpha = \frac{b}{c} = \frac{\text{Ankathete}}{\text{Hypotenuse}}$$

$$\tan \alpha = \frac{a}{b} = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Ankathete}} = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$$

$$\cot \alpha = \frac{b}{a} = \frac{\text{Ankathete}}{\text{Gegenkathete}} = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}$$

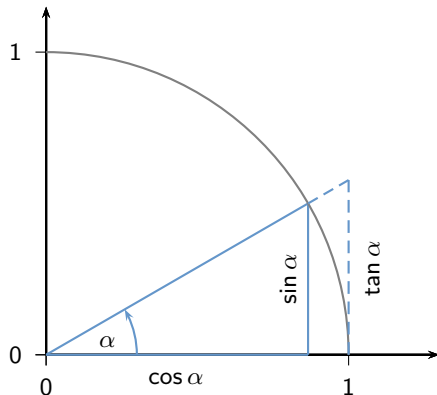


Abbildung: Trigonometrische Funktionen im Rechtwinkligen Dreieck

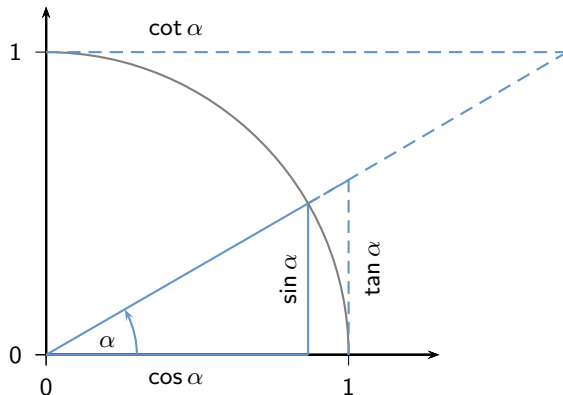


Abbildung: Trigonometrische Funktionen im Rechtwinkligen Dreieck

Die sogenannten Additionstheoreme beschreiben Umrechnungsregeln für trigonometrische Funktionen.

1. Summen und Differenzen von Winkeln

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin \alpha \cdot \cos \beta \pm \cos \alpha \cdot \sin \beta$$

$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos \alpha \cdot \cos \beta \mp \sin \alpha \cdot \sin \beta$$

Grundlagen

Aussagenlogik

Mengenlehre

Zahlenmengen und
Rechenregeln

Potenzen und Logarithmen

Trigonometrie

Notation, Abkürzungen und
co.

Gleichungen

Ungleichungen

Funktionen

Folgen und Reihen

Grenzwerte und Stetigkeit

Die sogenannten Additionstheoreme beschreiben Umrechnungsregeln für trigonometrische Funktionen.

1. Summen und Differenzen von Winkeln

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin \alpha \cdot \cos \beta \pm \cos \alpha \cdot \sin \beta$$

$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos \alpha \cdot \cos \beta \mp \sin \alpha \cdot \sin \beta$$

2. Doppelter Winkel

$$\sin(2\alpha) = 2 \sin \alpha \cdot \cos \alpha$$

$$\cos(2\alpha) = 2 \cos^2 \alpha - 1$$

Grundlagen

Aussagenlogik

Mengenlehre

Zahlenmengen und
Rechenregeln

Potenzen und Logarithmen

Trigonometrie

Notation, Abkürzungen und
co.

Gleichungen

Ungleichungen

Funktionen

Folgen und Reihen

Grenzwerte und
Stetigkeit

Die sogenannten Additionstheoreme beschreiben Umrechnungsregeln für trigonometrische Funktionen.

1. Summen und Differenzen von Winkeln

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin \alpha \cdot \cos \beta \pm \cos \alpha \cdot \sin \beta$$

$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos \alpha \cdot \cos \beta \mp \sin \alpha \cdot \sin \beta$$

2. Doppelter Winkel

$$\sin(2\alpha) = 2 \sin \alpha \cdot \cos \alpha$$

$$\cos(2\alpha) = 2 \cos^2 \alpha - 1$$

3. Trigonometrischer Pythagoras

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$$

Wichtige Werte der Winkelfunktionen

Im Allgemeinen kann man die Werte der trigonometrischen Funktionen nur numerisch berechnen. Für bestimmte Winkel jedoch kann man die Werte von Sinus, Kosinus und Tangens exakt bestimmen.

Gradmaß	0°	30°	45°	60°	90°
Bogenmaß	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
sin	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
cos	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
tan	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	—

Grundlagen

Aussagenlogik

Mengenlehre

Zahlenmengen und
Rechenregeln

Potenzen und Logarithmen

Trigonometrie

Notation, Abkürzungen und
co.

Gleichungen

Ungleichungen

Funktionen

Folgen und Reihen

Grenzwerte und
Stetigkeit

Das Summenzeichen verwendet man um (lange oder unendliche) Summen von Termen darzustellen, die nach einem einfachen Schema aufgebaut sind.

$$\sum_{i=1}^n a_i = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n$$

Beispiel 1.54

$$\sum_{i=1}^{10} i = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10$$

Grundlagen

Aussagenlogik

Mengenlehre

Zahlenmengen und
Rechenregeln

Potenzen und Logarithmen

Trigonometrie

Notation, Abkürzungen und
co.

Gleichungen

Ungleichungen

Funktionen

Folgen und Reihen

Grenzwerte und
Stetigkeit

Beispiel 1.54

$$\sum_{i=1}^{10} i = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10 = 55$$

Grundlagen

Aussagenlogik

Mengenlehre

Zahlenmengen und
Rechenregeln

Potenzen und Logarithmen

Trigonometrie

Notation, Abkürzungen und
co.

Gleichungen

Ungleichungen

Funktionen

Folgen und Reihen

Grenzwerte und
Stetigkeit

Beispiel 1.54

$$\sum_{i=1}^{10} i = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10 = 55$$

$$\sum_{i=1}^n i = \frac{n(n+1)}{2}$$

Grundlagen

Aussagenlogik

Mengenlehre

Zahlenmengen und
Rechenregeln

Potenzen und Logarithmen

Trigonometrie

Notation, Abkürzungen und
co.

Gleichungen

Ungleichungen

Funktionen

Folgen und Reihen

Grenzwerte und
Stetigkeit

Beispiel 1.54

$$\sum_{i=1}^{10} i = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10 = 55$$

$$\sum_{i=1}^n i = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$\sum_{k=1}^4 (2k - 1) = 1 + 3 + 5 + 7$$

Grundlagen

Aussagenlogik

Mengenlehre

Zahlenmengen und
Rechenregeln

Potenzen und Logarithmen

Trigonometrie

Notation, Abkürzungen und
co.

Gleichungen

Ungleichungen

Funktionen

Folgen und Reihen

Grenzwerte und
Stetigkeit

Beispiel 1.54

$$\sum_{i=1}^{10} i = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10 = 55$$

$$\sum_{i=1}^n i = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$\sum_{k=1}^4 (2k - 1) = 1 + 3 + 5 + 7 = 16$$

Beispiel 1.54

$$\sum_{i=1}^{10} i = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10 = 55$$

$$\sum_{i=1}^n i = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$\sum_{k=1}^4 (2k - 1) = 1 + 3 + 5 + 7 = 16$$

$$\sum_{j=1}^{1000} \frac{1}{2^j} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \dots + \frac{1}{2^{1000}}$$

Beispiel 1.54

$$\sum_{i=1}^{10} i = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10 = 55$$

$$\sum_{i=1}^n i = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$\sum_{k=1}^4 (2k - 1) = 1 + 3 + 5 + 7 = 16$$

$$\sum_{j=1}^{1000} \frac{1}{2^j} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \dots + \frac{1}{2^{1000}} \approx 1$$

Beispiel 1.55

Einer Legende zufolge soll der Erfinder des Schachspiels bei einem König einen Wunsch frei gehabt haben. Worauf er sich ein Schachbrett voller Reiskörner wünschte und zwar auf dem ersten Feld des Schachbretts ein Reiskorn, auf dem zweiten zwei, auf dem dritten vier, ... auf jedem Feld doppelt so viele Reiskörner wie auf dem Feld zuvor. Insgesamt also:

$$\begin{aligned}\sum_{i=0}^{63} 2^i &= 2^0 + 2^1 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + 2^5 + \dots + 2^{63} \\ &= 18.446.744.073.709.551.615 \approx 1,8 \cdot 10^{19}\end{aligned}$$

Ein Reiskorn wiegt ca. 0,025 g, damit ergibt sich ein Gesamtgewicht von ca. 461 Mrd. t, das rund 600-fache der jährlichen, weltweiten Reisproduktion.

Das Produkt der ersten n natürlichen Zahlen, kürzt man mit $n!$ (sprich n -Fakultät) ab.

$$n! := \begin{cases} 1 & \text{für } n = 0 \\ n \cdot (n-1)! & \text{sonst} \end{cases}$$

Das Produkt der ersten n natürlichen Zahlen, kürzt man mit $n!$ (sprich n -Fakultät) ab.

$$n! := \begin{cases} 1 & \text{für } n = 0 \\ n \cdot (n-1)! & \text{sonst} \end{cases}$$

Beispiel 1.56

$$1! = 1$$

$$2! = 2$$

$$3! = 6$$

$$4! = 24$$

$$5! = 120$$

$$10! = 3628800$$

Haben wir allgemein eine Menge mit n Elementen gegeben, so bezeichnen wir jede mögliche Anordnung der n Elemente als *Permutation* der Elemente.

Haben wir allgemein eine Menge mit n Elementen gegeben, so bezeichnen wir jede mögliche Anordnung der n Elemente als *Permutation* der Elemente.

Satz 1.57

Sei $n \in \mathbb{N}$. Es gibt

$$n \cdot (n - 1) \cdot (n - 2) \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1 = n!$$

Möglichkeiten, n unterscheidbare Elemente anzuordnen.

Grundlagen

Aussagenlogik

Mengenlehre

Zahlenmengen und
Rechenregeln

Potenzen und Logarithmen

Trigonometrie

Notation, Abkürzungen und
co.

Gleichungen

Ungleichungen

Funktionen

Folgen und Reihen

Grenzwerte und
Stetigkeit

Für $n, k \in \mathbb{N}$ mit $k < n$ definiert man den Binomialkoeffizient als:

$$\binom{n}{k} := \frac{n!}{(n-k)! k!}$$

(gesprochen „ n über k “).

Eigenschaften der Binomialkoeffizienten

$$\binom{n}{n} = \binom{n}{0} = 1$$

Grundlagen

Aussagenlogik

Mengenlehre

Zahlenmengen und
Rechenregeln

Potenzen und Logarithmen

Trigonometrie

Notation, Abkürzungen und
co.

Gleichungen

Ungleichungen

Funktionen

Folgen und Reihen

Grenzwerte und
Stetigkeit

Eigenschaften der Binomialkoeffizienten

$$\binom{n}{n} = \binom{n}{0} = 1$$

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$$

Grundlagen

Aussagenlogik

Mengenlehre

Zahlenmengen und
Rechenregeln

Potenzen und Logarithmen

Trigonometrie

Notation, Abkürzungen und
co.

Gleichungen

Ungleichungen

Funktionen

Folgen und Reihen

Grenzwerte und
Stetigkeit

Eigenschaften der Binomialkoeffizienten

$$\binom{n}{n} = \binom{n}{0} = 1$$

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$$

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}$$

rekursive Definition

Das Pascalsche Dreieck

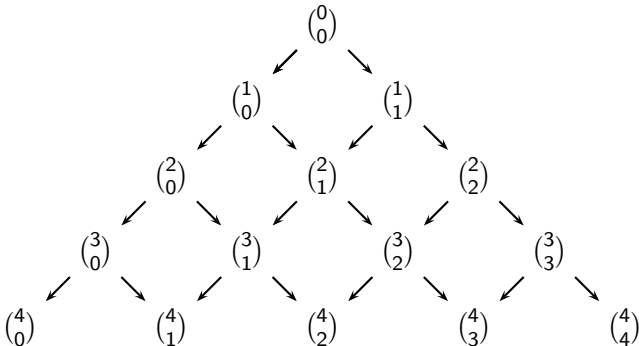


Abbildung: Das Pascalsche Dreieck illustriert die rekursive Eigenschaft der Binomialkoeffizienten. Jeder Binomialkoeffizient berechnet sich als Summe der beidem über ihm stehenden Binomialkoeffizienten.

Der binomische Lehrsatz

Für $a, b \in \mathbb{R}$ und $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$(a + b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$$

Beispiel 1.58

Grundlagen

Aussagenlogik

Mengenlehre

Zahlenmengen und
Rechenregeln

Potenzen und Logarithmen

Trigonometrie

Notation, Abkürzungen und
co.

Gleichungen

Ungleichungen

Funktionen

Folgen und Reihen

Grenzwerte und
Stetigkeit

Grundlagen

Aussagenlogik

Mengenlehre

Zahlenmengen und
Rechenregeln

Potenzen und Logarithmen

Trigonometrie

Notation, Abkürzungen und
co.

Gleichungen

Ungleichungen

Funktionen

Folgen und Reihen

Grenzwerte und
Stetigkeit

Beispiel 1.58

► $(a + b)^2$

Beispiel 1.58

► $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

Beispiel 1.58

- ▶ $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
- ▶ $(a - b)^5$

Beispiel 1.58

► $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

► $(a - b)^5 = (a + (-b))^5 = a^5 - 5a^4b + 10a^3b^2 - 10a^2b^3 + 5ab^4 - b^5$

Beispiel 1.58

- ▶ $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
- ▶ $(a - b)^5 = (a + (-b))^5 = a^5 - 5a^4b + 10a^3b^2 - 10a^2b^3 + 5ab^4 - b^5$
- ▶ $(4x^2 + y)^3$

Beispiel 1.58

- ▶ $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
- ▶ $(a - b)^5 = (a + (-b))^5 = a^5 - 5a^4b + 10a^3b^2 - 10a^2b^3 + 5ab^4 - b^5$
- ▶ $(4x^2 + y)^3 =$
 $= \binom{3}{0} (4x^2)^0 y^3 + \binom{3}{1} (4x^2)^1 y^2 + \binom{3}{2} (4x^2)^2 y^1 + \binom{3}{3} (4x^2)^3 y^0$
 $= 64x^6 + 48x^4y + 12x^2y^2 + y^3$

Beispiel 1.59

Beim Lotto 6 aus 49 werden bei einem Tipp 6 verschiedene Zahlen aus den Zahlen von 1 bis 49 ausgewählt. Wie viele Möglichkeiten gibt es, einen Tipp abzugeben?

Beispiel 1.59

Beim Lotto 6 aus 49 werden bei einem Tipp 6 verschiedene Zahlen aus den Zahlen von 1 bis 49 ausgewählt. Wie viele Möglichkeiten gibt es, einen Tipp abzugeben?

Wir starten mit folgender Überlegung: Wenn wir zunächst die Reihenfolge der getippten Zahlen berücksichtigen, so gibt es $49 \cdot 48 \cdot 47 \cdot 46 \cdot 45 \cdot 44$ Möglichkeiten.

Beispiel 1.59

Beim Lotto 6 aus 49 werden bei einem Tipp 6 verschiedene Zahlen aus den Zahlen von 1 bis 49 ausgewählt. Wie viele Möglichkeiten gibt es, einen Tipp abzugeben?

Wir starten mit folgender Überlegung: Wenn wir zunächst die Reihenfolge der getippten Zahlen berücksichtigen, so gibt es $49 \cdot 48 \cdot 47 \cdot 46 \cdot 45 \cdot 44$ Möglichkeiten.

Die Reihenfolge (in der die Kugeln fallen, bzw. die Zahlen getippt werden) ist aber unerheblich. 1, 2, 7, 15, 17, 39 und 2, 7, 39, 15, 17, 1 beschreiben den gleichen Tipp, das gleiche Ergebnis. Man kann diese 6 Zahlen auf 6! verschiedene Arten anordnen, ohne dass sich der Tipp ändert.

Beispiel 1.59 (fort.)

Bei den oben genannten $49 \cdot 48 \cdot 47 \cdot 46 \cdot 45 \cdot 44$ Möglichkeiten kommt also jeder Tipp $6!$ mal vor. Um die Anzahl der verschiedenen Tipps zu erhalten, muss man also noch durch $6!$ dividieren.

Es gibt also

$$\frac{49 \cdot 48 \cdot 47 \cdot 46 \cdot 45 \cdot 44}{6!} = 13983816 \text{ verschiedene Tipps.}$$

Seien $k, n \in \mathbb{N}$ mit $k \leq n$. Von n Elementen lassen sich k Elemente ohne Berücksichtigung der Reihenfolge auf

$$\binom{n}{k} = \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \dots \cdot (n-k+1)}{k!}$$

Arten auswählen.