2. Übung Komplexe Analysis II

1. Aufgabe

Es sei V ein reeller endlichdimensionaler Vektorraum der Dimension $\dim V = 4$ und sei (e_1, e_2, e_3, e_4) eine Basis von V mit zugehöriger Dualbasis $(e_1^*, e_2^*, e_3^*, e_4^*)$ von V^*. Weiter seien $b_j \in V$, $1 \leq j \leq 4$ gegeben durch

$$b_1 = e_1 - e_2,\ \ b_2 = 2e_1 + e_3,\ b_3 = e_4,\ \ b_4 = e_2 + e_3.$$

(a) Zeigen Sie, dass (b_1, b_2, b_3, b_4) ebenfalls eine Basis von V ist.

Es sei $\omega = e_1^* \wedge e_2^* \wedge e_3^* \in \Lambda^3 V^*$.

(b) Berechnen Sie explizit die Darstellung von ω in der von (b_1, b_2, b_3, b_4) induzierten Basis von $\Lambda^3 V^*$, d.h. $\omega = \sum'_{|I|=3} a_I b_I^*$.

2. Aufgabe

Es sei V ein reeller endlichdimensionaler Vektorraum der Dimension $\dim V = n$.

(a) Es sei $n \leq 3$ und $\omega \in \Lambda^2 V^*$. Zeigen Sie, dass es $\alpha, \beta \in \Lambda^1 V^*$ gibt mit $\omega = \alpha \wedge \beta$.

(b) Es sei $n > 3$. Zeigen Sie, dass es $\omega \in \Lambda^2 V^*$ gibt mit $\omega \neq \alpha \wedge \beta$ für alle $\alpha, \beta \in \Lambda^1 V^*$.

3. Aufgabe

Es sei $F\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, $F(x_1, x_2, x_3) = (x_2^2 \sin(x_1), x_3 \cos(x_1))$. Es sei $\omega \in \Omega^2(\mathbb{R}^2)$ mit $\omega = x dx \wedge dy$. Berechnen Sie $F^*\omega$ und $d(F^*\omega)$.

4. Aufgabe

Für $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ betrachte man die Menge

$$M = \{x = (x_0, x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid x_0 = f(x_1, \ldots, x_n)\}.$$

(a) Zeigen Sie, dass M eine glatte n-dimensionale Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^{n+1}$ ist.

Man betrachte $G = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} | x_0 < f(x_1, \ldots, x_n)\}$.

(b) Zeigen Sie, dass $G \subset \mathbb{R}^{n+1}$ ein Gebiet mit C^∞-glattem Rand bG ist und dass $bG = M$ gilt.

(c) Zeigen Sie, dass $A := \{(U, \varphi)\}$ mit $U = M$ und $\varphi(x) = (x_1, \ldots, x_n)$ ein Atlas für M ist, welcher bezüglich der Randorientierung auf $M = bG$ positiv orientiert ist.

Es sei nun $\omega \in \Omega^n(\mathbb{R}^{n+1})$ definiert durch $\omega = \frac{\nu}{\mu} \lrcorner dx_0 \wedge \ldots \wedge dx_n$ mit

$$\nu(x) = \frac{\partial}{\partial x_0} - \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_j}(x') \frac{\partial}{\partial x_j}, \quad \text{und} \quad \mu(x) = \left(1 + \sum_{j=1}^{n} \left| \frac{\partial f}{\partial x_j}(x') \right|^2 \right)^{\frac{1}{2}},$$

für $x = (x_0, x') \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$.

(d) Zeigen Sie: $(\varphi^{-1})^* \omega = \mu \circ \varphi^{-1} dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_n$.

Es sei nun $n = 2$, $f(x_1, x_2) = x_1 x_2$ und $V := M \cap \{x \in \mathbb{R}^3 \mid x_1^2 + x_2^2 < 1\}$.

(d) Zeigen Sie $\int_V \omega = \frac{2\pi}{3}(2\sqrt{2} - 1)$.

5. Aufgabe
Es sei $\omega \in \Omega^{n-1}(\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$ gegeben durch

$$\omega = \|x\|^{-n} \sum_{j=1}^{n} (-1)^{j+1} x_j dx_1 \wedge \ldots \wedge \widehat{dx_j} \wedge \ldots \wedge dx_n.$$

(a) Zeigen Sie, dass ω geschlossen ist, d.h. $d\omega = 0$.

Es sei $B_R^n(0) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| < R\}$ ein Ball mit Radius $R > 0$ um 0. Dann ist $S_R = bB_R^n(0)$ eine glatte Untermannigfaltigkeit der Dimension $n - 1$, welche durch die Randorientierung orientiert ist.

(b) Zeigen Sie: $\int_{S_R} \omega = \int_{S_r} \omega$ für alle $r, R > 0$.

Wir möchten nun zeigen, dass $H^{n-1}_{\mathrm{DR},\mathbb{C}}(\mathbb{R}^n \setminus \{0\}) \neq 0$ gilt.

(c) Begründen Sie, dass $\int_{S_R} \omega > 0$ gilt.
(*Hinweis: Wählen Sie geeignete Parametrisierungen und benutzen Sie zum Beispiel Aufgabe 5*)

(d) Zeigen Sie mit Hilfe des Satzes von Stokes für Untermannigfaltigkeiten, dass ω nicht exakt sein kann.

6. Aufgabe
Es sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und sternförmig bezüglich $0 \in \mathbb{R}^n$, d.h. für jedes $x \in U$ und $t \in [0, 1]$ gilt $tx \in U$. Für $k \geq 1$ definieren wir eine lineare Abbildung $P^{k-1} \colon \Omega^k_{\mathbb{C}}(U) \to \Omega^{k-1}_{\mathbb{C}}(U)$ durch

$$f dx_I \mapsto \sum_{l=1}^{k} (-1)^{l+1} \left(\int_0^1 t^{k-1} f(tx) dt \right) x_{j_l} dx_{j_1} \wedge \ldots \wedge \widehat{dx_{j_l}} \wedge \ldots \wedge dx_{j_k}$$

für $f \in C^\infty(U)$ und $I = (j_1, \ldots, j_k)$.

(a) Zeigen Sie, dass $\omega = P^k(d\omega) + dP^{k-1}(\omega)$ für alle $\omega \in \Omega^k_{\mathbb{C}}(U)$ und $k \geq 1$ gilt. (*Hinweis: Benutzen Sie* $\frac{\partial}{\partial t} f(tx) = \sum_{j=1}^n x_j \frac{\partial f}{\partial x_j}(tx)$.)

(b) Zeigen Sie: $H^k_{\mathrm{DR},\mathbb{C}}(U) = 0$ für $k \geq 1$.

7. Aufgabe
Es sei $f\colon \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^m, f = (f_1, \dots, f_m)$ eine C^1-glatte Abbildung. Wir schreiben $f_j = u_j + iv_j$ und betrachten $f = (u_1, \dots u_m, v_1, \dots, v_m)$ als eine Abbildung von $\mathbb{R}^{2n}$ nach $\mathbb{R}^{2m}$. Es sei

$$df(z) = \begin{pmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial u_1}{\partial x_n} & \frac{\partial u_1}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial u_1}{\partial y_n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial u_m}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial u_m}{\partial x_n} & \frac{\partial u_m}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial u_m}{\partial y_n} \\ \frac{\partial v_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial v_1}{\partial x_n} & \frac{\partial v_1}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial v_1}{\partial y_n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial v_m}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial v_m}{\partial x_n} & \frac{\partial v_m}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial v_m}{\partial y_n} \end{pmatrix}$$

die reelle Jacobimatrix von f und

$$J_n := \begin{pmatrix} 0 & -\mathrm{Id}_{n\times n} \\ \mathrm{Id}_{n\times n} & 0 \end{pmatrix}.$$

Zeigen Sie, dass $f\colon \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^m$ genau dann holomorph auf einer offenen Teilmenge $U \subset \mathbb{C}^n$ ist, wenn $J_m df(z) = df(z) J_n$ für alle $z \in U$ gilt.

8. Aufgabe
Es sei $\mathbb{H} = \{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Im}(z) > 0\}$ die obere Halbebene und $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$ die Einheitskreisscheibe. Bestimmen Sie die Dolbeault-Kohomologiegruppen $H^{p,q}(\mathbb{D})$, $H^{p,q}(\mathbb{H})$ und $H^{p,q}(\mathbb{C})$ für alle $p, q \in \mathbb{N}_0$.

9. Aufgabe
Es sei $U = \mathbb{C}^2 \setminus \{0\}$.

(a) Man benutze die Identität

$$\frac{1}{z_1 z_2} = \frac{\overline{z_2}}{z_1 r^2} + \frac{\overline{z_1}}{z_2 r^2}$$

auf $\{z_1 z_2 \neq 0\}$ mit $r = \sqrt{|z_1|^2 + |z_2|^2}$ um zu zeigen, dass $\omega \in \Omega^{0,1}(U)$ existiert mit $\overline{\partial}\omega = 0$ auf U und $\omega = \overline{\partial}(\overline{z_2}/(z_1 r^2))$ auf $\{z_1 \neq 0\}$.

(b) Angenommen es gibt $f \in C^\infty(U)$ mit $\overline{\partial} f = \omega$ auf U. Zeigen Sie, dass dann $u(z) = z_1 f(z) - \overline{z}_2 r^{-2}$ holomorph auf U ist und untersuchen Sie das Verhalten von u für $z \to 0$.

(c) Folgern Sie $H^{0,1}(U) \neq 0$.

10. Aufgabe
Es sei $U = \mathbb{C}^n \setminus \{0\}$, $n \geq 2$. Zeigen Sie, dass es $q \geq 1$ gibt mit $H^{0,q}(U) \neq 0$.
(*Hinweis: Aufgabe 5.*)

11. Aufgabe
Es sei $U \subset \mathbb{C}^n$ offen und $\varphi \in C^\infty(U, \mathbb{R})$ eine glatte reellwertige Funktion.

(a) Zeigen Sie: $\frac{i}{2}\partial\overline{\partial}\varphi_a(X, iX) = \operatorname{Lev}(\varphi)(a, X)$ für alle $X \in \mathbb{C}^n$ und $a \in U$.

Es sei $V \subset \mathbb{C}^m$ offen und $F\colon V \to U$ eine holomorphe Abbildung.

(b) Zeigen Sie: $\operatorname{Lev}(\varphi)(F(a), dFX) = \operatorname{Lev}(\varphi \circ F)(a, X)$ für alle $X \in \mathbb{C}^n$ und $a \in V$.