SS 19 H. Herrmann

1. Übung Komplexe Analysis II

1. Aufgabe

Es sei $V \neq \{0\}$ ein reeller endlich dimensionaler Vektorraum und $J\colon V \to V$ eine lineare Abbildung mit $J^2 := J \circ J = -\mathrm{Id}$.

(a) Zeigen Sie, dass die Dimension von V gerade ist, d.h. $\dim V = 2n$ für ein $n \in \mathbb{N}$.

Ist $W \subset V$ ein Untervektorraum, so definieren wir $W^J = \{v \in W \mid Jv \in W\}$.

(b) Zeigen Sie, dass W^J ein Untervektorraum gerader Dimension ist.

(c) Zeigen Sie: $\dim W = 2n-1 \Rightarrow \dim W^J = 2n-2$.

Es sei $l\colon V \to \mathbb{R}$ eine lineare Abbildung. Wir setzten $L\colon V \to \mathbb{C}$, $L(v) = l(v) + il(Jv)$.

(d) Zeigen Sie: $(\ker l)^J = \ker L$.

2. Aufgabe

Man betrachte die kanonische Identifikation $\mathbb{C}^n \simeq \mathbb{R}^{2n}$,

$$\mathbb{C}^n \ni X = (a_1+ib_1, \dots, a_n+ib_n)^T \mapsto (a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n)^T = (\mathrm{Re}(X), \mathrm{Im}(X))^T \in \mathbb{R}^{2n}.$$

Weiter sei $J\colon \mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{R}^{2n}$ gegeben durch

$$Jv = \begin{pmatrix} 0 & -\mathrm{Id}_{n\times n} \\ \mathrm{Id}_{n\times n} & 0 \end{pmatrix} v.$$

(a) Rechnen Sie nach, dass $J^2 = -\mathrm{Id}$ gilt und überzeugen Sie sich, dass bezüglich der kanonischen Identifikation die Multiplikation mit i auf $\mathbb{C}^n$ der linearen Abbildung J auf $\mathbb{R}^{2n}$ entspricht.

Es sei $U \subset \mathbb{C}^n$ offen und $\varphi \in C^1(U, \mathbb{R})$ eine reellwertige Funktion mit $d\varphi \neq 0$ auf $M := \{z \in U \mid \varphi(z) = 0\}$. Weiter sei $p \in M$, $T_pM = \{X \in \mathbb{C}^n \mid (d\varphi)_p(X) = 0\}$ und $T_p^{\mathbb{C}}M = \{X \in \mathbb{C}^n \mid (\partial\varphi)_p(X) = 0\}$. Zeigen Sie:

(b) $T_p^{\mathbb{C}}M = \{X \in T_pM \mid iX \in T_pM\}$.

(c) $T_p^{\mathbb{C}}M$ ist ein komplexer Untervektorraum von $\mathbb{C}^n$ mit komplexer Dimension $\dim_{\mathbb{C}} T_p^{\mathbb{C}}M = n-1$.

(Hinweis: Benutzen Sie (a) und Aufgabe 1)

3. Aufgabe
Es sei $G = \mathbb{B}^2 = \{(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2 \mid |z_1|^2 + |z_2|^2 < 1\}$. Zeigen Sie, dass G ein C^∞-glatt berandetes streng pseudokonvexes Gebiet ist und geben Sie explizit für jeden Punkt $p \in bG$ eine Basis $\{X_1, X_2, X_3\}$ von $T_p(bG)$ an mit $X_1, X_2 \in T_p^{\mathbb{C}}(bG)$.

4. Aufgabe
Es sei $G = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \min\{x_1, x_2\} > 0\}$. Zeigen Sie, dass G keinen C^1-glatten Rand im Punkt $0 \in bG$ hat. Zeigen Sie außerdem, dass G in jedem Punkt $a \in bG \setminus \{0\}$ C^∞-glatten Rand hat.

5. Aufgabe
Man betrachte die Menge $G = \{(z_1, z_2, z_3) \in \mathbb{C}^3 \mid |z_1|^2 + |z_2|^2 < \mathrm{Re}(z_3) + |z_3|^2\}$. Zeigen Sie, dass 0 ein streng pseudokonvexer Randpunkt von G ist. Ist G in 0 geometrisch konvex?

6. Aufgabe
Es sei $G \subset \mathbb{C}^n$ offen mit C^2-glattem streng pseudokonvexem Rand in $a \in bG$. Zeigen Sie, dass es für jeden Vektor $X \in T_a^{\mathbb{C}} bG$ ein $\varepsilon > 0$ und eine holomorphe Abbildung

$$f \colon \mathbb{D}_\varepsilon := \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < \varepsilon\} \to \mathbb{C}^n$$

mit $f(0) = a$ und $df_0 \cdot 1 = X$ gibt, so dass $f(\mathbb{D}_\varepsilon) \cap \overline{G} = \{a\}$ gilt.
(*Hinweis: Nehmen Sie zunächst an, dass G in a streng konvex ist und untersuchen Sie Abbildungen der Form $z \mapsto a + z \cdot X$. Argumentieren Sie im allgemeinen Fall mit der Existenz geeigneter biholomorpher Transformationen.*)

7. Aufgabe
Es sei $U \subset \mathbb{C}^n$ offen, $a \in U$ ein Punkt, $X \in \mathbb{C}^n$ ein Vektor und $\varphi, \psi \in C^2(U, \mathbb{R})$ zwei reellwertige Funktionen. Zeigen Sie:

(a) $\mathrm{Lev}(\varphi + \psi)(a, X) = \mathrm{Lev}(\varphi)(a, X) + \mathrm{Lev}(\psi)(a, X)$,

(b) $\mathrm{Lev}(\varphi \cdot \psi)(a, X) =$

$$\psi(a)\mathrm{Lev}(\varphi)(a, X) + 2\mathrm{Re}[(\partial\varphi)_a(X)(\partial\psi)_a(X)] + \varphi(a)\mathrm{Lev}(\psi)(a, X).$$

Es sei $\lambda \in C^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ eine Funktion. Zeigen Sie:

(c) $\mathrm{Lev}(\lambda \circ \varphi)(a, X) = \lambda'(\varphi(a))\mathrm{Lev}(\varphi)(a, X) + \lambda''(\varphi(a))|(\partial\varphi)_a(X)|^2$,

(d) Ist φ streng plurisubharmonsich und $\lambda'(t) > 0$, $\lambda''(t) \geq 0$ für alle $t \in \mathbb{R}$, so ist $\lambda \circ \varphi$ streng plurisubharmonisch.

8. Aufgabe
Man betrachte die Funktionen $\varphi_j\colon \mathbb{C}^2 \to \mathbb{R}$, $j = 1, 2, 3$,

$$\begin{aligned}
\varphi_1(z_1, z_2) &= |z_1|^4 + |z_2|^2 - 2\mathrm{Re}(z_1 z_2),\\
\varphi_2(z_1, z_2) &= |z_1|^4 + |z_2|^2 - 2\mathrm{Re}(z_1 \overline{z_2}),\\
\varphi_3(z_1, z_2) &= |z_1|^4 + |z_2|^2 + |z_1|^2|z_2|^2.
\end{aligned}$$

Für jede Funktion φ_j, $j = 1, 2, 3$, bestimme man alle Punkte, in denen φ_j plurisubharmonisch ist und alle Punkte, in denen φ_j streng plurisubharmonisch ist.

9. Aufgabe
Es sei $U \subset \mathbb{C}^n$ offen und $\varphi \in C^2(U, \mathbb{R})$. Zeigen Sie, dass φ genau dann streng plurisubharmonisch auf U ist, wenn für jede Funktion $\psi \in C_0^2(U, \mathbb{R})$ ein $\varepsilon_0 > 0$ existiert, sodass für alle $|\varepsilon| < \varepsilon_0$ die Funktion $\varphi + \varepsilon\psi$ plurisubharmonisch auf U ist.

10. Aufgabe
Es sei $U \subset \mathbb{C}^n$ offen, $a \in U$ ein Punkt und $\varphi \in C^2(U, \mathbb{R})$ eine reellwertige Funktion. Zeigen Sie:

(a) Für alle $X \in \mathbb{C}^n$ gilt $\mathrm{Hess}_{\mathbb{R}}(\varphi)(a, X) = 2\mathrm{Re}[\mathrm{Hess}_{\mathbb{C}}(\varphi)(a, X)] + 2\mathrm{Lev}(\varphi)(a, X)$.

(b) Ist die reelle Hessematrix von φ im Punkt a positiv definit (d.h. $\mathrm{Hess}_{\mathbb{R}}(\varphi)(a, X) > 0$ für alle $X \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}$), so ist φ streng plurisubharmonisch in a.
(Hinweis: Benutzen Sie die Formel aus (a) für X und iX.)

Zeigen Sie außerdem, dass die Umkehrung der Aussage in (b) im Allgemeinen falsch ist, indem Sie eine streng plurisubharmonische Funktion φ auf einer offenen Menge $U \subset \mathbb{C}^n$ angeben, deren reelle Hessematrix in einem Punkt $a \in U$ nicht positiv semidefinit ist.

11. Aufgabe
Es sei $U \subset \mathbb{C}^n$ offen und $\varphi \in C^2(U, \mathbb{R})$.

(a) Zeigen Sie, dass φ genau dann streng plurisubharmonisch in $a \in U$ ist, wenn $\mathrm{Lev}(\varphi)(a, X) > 0$ für alle $X \in b\mathbb{B}^n$ gilt.

Sei nun φ streng plurisubharmonsich auf U und $V \subset\subset U$ eine relativ kompakte Teilmenge.

(b) Zeigen Sie, dass $\inf\{\mathrm{Lev}(\varphi)(z, X) \mid (z, X) \in V \times b\mathbb{B}^n\} > 0$ gilt.

(c) Zeigen Sie durch Angabe eines Gegenbeispiels, dass die Aussage in (b) im Allgemeinen falsch ist, wenn V nicht relativ kompakt ist.

12. Aufgabe
Es sei $G \subset\subset \mathbb{C}^n$ ein Gebiet, $U \subset \mathbb{C}^n$ eine offene Umgebung von $\overline{G}$ und $\varphi \in C^2(U, \mathbb{R})$ plurisubharmonisch mit $G = \{\varphi < 0\}$ und $d\varphi \neq 0$ auf bG. Zeigen Sie, dass G eine steinsche Umgebungsbasis besitzt.