Funktionentheorie Übungsblatt 12

Prof. Dr. N. Shcherbina, Dr. R. Andrist Abgabe: 12. Juli 2018

1. [3+3+3 = 9 P] Seien $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$.

(a) Entwickeln Sie $z \mapsto \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{1 - a_k z}$ in eine Taylorreihe um 0.

(b) Wie groß ist der Konvergenzradius einer holomorphen Funktion $f \colon \mathbb{C} \setminus \{a_1, \ldots, a_k\} \to \mathbb{C}$ in einem Punkt z_0?

(c) Zeigen Sie nun mit Hilfe von (a) und (b), dass $\displaystyle\limsup_{p\to\infty} \sqrt[p]{|a_1^p + \cdots + a_n^p|} = \max_{k=1,\ldots,n} |a_k|$.

2. [7 P] Es seien $f, g \in \mathcal{O}(\mathbb{C})$ mit der Eigenschaft $|f(z)| \leq |g(z)|$ für alle $z \in \mathbb{C}$.
Zeigen Sie, dass $f = \lambda \cdot g$ für ein $\lambda \in \mathbb{C}$ mit $|\lambda| \leq 1$.

3. [7 P] Sei $f \colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}, z \mapsto z^4 + 5iz^2$. Berechnen Sie $\sup_{z\in\mathbb{C}\,:\,|z|\leq 2} |f(z)|$.
Wird das Supremum angenommen? An welchen Stellen?

4. [8+2 = 10 P] Berechnen Sie für $a \in \mathbb{C}$: $\quad g(a) := \displaystyle\lim_{r\to\infty} \int_{\partial(r\mathbb{D})} \frac{\sin(z)}{z^2 + a^2}\,\mathrm{d}z$
Für welche $a \in \mathbb{C}$ ist g komplex differenzierbar?

5. [4+3 = 7 P]

(a) Sei $M > 0$, sei $f(z) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ eine ganze Funktion und es gelte $|f(z)| \leq Me^{|z|}$ für alle $z \in \mathbb{C}$. Zeigen Sie, dass $|a_n| \leq M \cdot \left(\frac{e}{n}\right)^n$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

(b) Gibt es eine ganze holomorphe Funktion, deren Koeffizienten so schnell wachsen, dass die Abschätzung aus (a) für kein $M > 0$ gilt?

Abgabe: jeweils donnerstags ins Postfach von Henrik Jürgens, Nr. 95 auf D.13

Die Prüfungsanmeldung ist bis zum 14. Juli 2018 möglich.