Funktionentheorie

Übungsblatt 11

Prof. Dr. N. Shcherbina, Dr. R. Andrist

Abgabe: 5. Juli 2018

1. [2+3+2+4+3 = 14 P] Es seien $\gamma\colon [0,2\pi] \to \mathbb{C},\ t \mapsto 2e^{it}$, und $\delta\colon [0,2\pi] \to \mathbb{C},\ t \mapsto e^{it}+1$. Berechnen Sie die folgenden Integrale mit Hilfe der Cauchy-Integralformel für Kreisscheiben:

(a) $\displaystyle\int_\gamma \frac{\sin(z)}{z+i}\,\mathrm{d}z$

(b) $\displaystyle\int_\gamma \frac{e^z}{(z-1)(z+3)^2}\,\mathrm{d}z$

(c) $\displaystyle\int_\gamma \frac{1}{z^2+(3-i)z-3i}\,\mathrm{d}z$

(d) $\displaystyle\int_\delta \left(\frac{z}{z-1}\right)^n \mathrm{d}z,\ n \in \mathbb{N}$

(e) $\displaystyle\int_\gamma \frac{\sin z}{(z-1)(z+1)^2}\,\mathrm{d}z$

2. [4+4 = 8 P] Entwickeln Sie folgende Funktionen f in Potenzreihen in z um 0 und bestimmen Sie die Konvergenzradien:

(a) $z \mapsto \dfrac{e^z}{1-tz}, \quad t \in \mathbb{C}$

(b) $z \mapsto \dfrac{\sin^2(z)}{z}$

3. [2+2+3+3 = 10 P] Sei $f\colon G \to \mathbb{C}$ eine holomorphe Funktion. Zeigen/untersuchen Sie mit Hilfe der Cauchy-Riemann'schen Differentialgleichungen:

(a) Ein Punkt $x_0 \in G$ ist genau dann kritischer Punkt von $\operatorname{Re} f$, wenn x_0 kritischer Punkt von $\operatorname{Im} f$ ist.

(b) Stimmt es, dass $f'(x_0) = 0$ genau dann, wenn x_0 ein kritischer Punkt von $\operatorname{Re} f$ ist?

(c) Was können Sie über die Eigenwerte der Hesse-Matrix von $\operatorname{Re} f$ sagen?

(d) Wenn $\operatorname{Re} f$ ein lokales Maximum annimmt, dann ist f konstant.

4. [2+2+4 = 8 P] Sei $\mathbb{D} := \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ die offene Einheitskreisscheibe und sei $f\colon \mathbb{D} \to \mathbb{C}$ holomorph.

(a) Seien G_1 und G_2 zwei Gebiete, so dass $G = G_1 \cap G_2$ zusammenhängend ist. Seien f_j holomorph auf G_j für $j = 1,2$, die auf einer offenen Menge $U \subset G$ übereinstimmen. Gilt auch $f_1 \equiv f_2$ auf ganz G?

(b) Zeigen Sie, dass die Potenzreihenentwicklung von f um $\frac{1}{2}$ mindestens den Konvergenzradius $\frac{1}{2}$ hat.

(c) Die Potenzreihenentwicklung von f um $\frac{1}{2}$ habe den Konvergenzradius $\frac{1}{2}$. Zeigen Sie, dass f in keine Umgebung von 1 holomorph fortgesetzt werden kann, d.h. es ist nicht möglich, ein $\varepsilon > 0$ und eine holomorphe Funktion $\tilde{f}\colon \mathbb{D} \cup (1+\varepsilon\mathbb{D}) \to \mathbb{C}$ zu finden, so dass $\tilde{f}|\mathbb{D} = f$ gilt.

Abgabe: jeweils donnerstags ins Postfach von Henrik Jürgens, Nr. 95 auf D.13